

6.9 Beweis der Transformationsformel

Hilfssatz 1

Für jeden kompakten Würfel W in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$v(T(W)) \leq \max_{x \in W} \{ |\det(DT(x))| \} \cdot v(W)$$

Beweis: $T(W)$ ist kompakt, also messbar. Ist

$v(W) = 0$, dann ist auch $T(W)$ eine Nullmenge.

Nach 6.8 ist die Aussage richtig. Sei nun $v(W) \neq 0$ und $\alpha = \frac{v(T(W))}{v(W)}$. Wir zerlegen W nun in

2^n gleichgroße kompakte Teilwürfel mit halber Kantenlänge. Unter diesen Würfeln gibt es einen Würfel W_1 mit:

$$v(T(W_1)) \geq \alpha v(W_1) = \alpha \cdot 2^{-n} \cdot v(W)$$

Wir zerlegen W_1 wieder in 2^n Teilwürfel und erhalten eine Folge

$$W \supset W_1 \supset \dots \supset W_k$$

von kompakten Teilwürfeln mit

$$v(T(W_k)) \geq \alpha v(W_k)$$

Sei $\alpha \in \bigcap_{k=1}^{\infty} W_k$ und $b = T(\alpha)$. Zur Vereinfachung der

Notation nehmen wir $a = 0, b = 0 \in \mathbb{R}^n$. T ist in a stetig diffbar, d.h. es gibt eine Darstellung

$$T(x) = Ax + \varphi(x)$$

wobei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\|x - x_0\|} = 0$, $A = DT(a)$. Für unsere Zwecke

in eine leicht andere Darstellung: Da A invertierbar ist

$$r(x) = \frac{\varphi(x)}{\|x - x_0\|} \text{ definiert für } x \neq 0$$

und $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$.

Also

$$T(x) = A(x + r(x) \cdot \|x - x_0\|)$$

Sei nun

$$W_k = \{x \mid \|x - x_0\| \leq 2^{-k} \cdot d/3\}$$

wobei d die halbe Kantenlänge von W ist und m_k der MP von W_k . Für $\varepsilon > 0$ $\exists$ ein k sol.

$$V_k = \{x + r(x) \cdot \|x\|_{\infty} \mid x \in W_k\}$$

in

$$W_k(\varepsilon) := \{x \mid \|x - m_k\|_{\infty} \leq 2^{-k} d (1 + \varepsilon)\}$$

enthalten ist. In der Tat zu $\varepsilon > 0$ können wir k so wählen, dass

$$\|r(x)\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in W_k.$$

Also

$$\begin{aligned} & \|x + r(x) \|x\|_{\infty} - m_k \|_{\infty} \\ & \leq \|x - m_k\|_{\infty} + \frac{\varepsilon}{2} \|x\|_{\infty} \leq 2^{-k} d + \frac{\varepsilon}{2} \|x\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Wegen $0 \in W_k$ gilt: $\|m_k\| \leq 2^{-k} d$ und daher

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x - m_k\|_{\infty} + \|m_k\|_{\infty} \leq 2^{-k} d + 2^{-k} d = 2 \cdot 2^{-k} d$$

Also

$$\begin{aligned} \|x + r(x) \|x\|_{\infty} - m_k \| & \leq 2^{-k} d + \varepsilon 2^{-k} d \\ & = (1 + \varepsilon) 2^{-k} d, \end{aligned}$$

d.h. $V_k \subset W_k(\varepsilon)$. Damit haben wir

$$T(W_k) = AV_k \subset AW_k(\varepsilon)$$

gezeigt. Also

$$v(T(W_k)) \leq |\det(A)| \cdot v(W_k(\varepsilon)) = |\det(A)| (1 + \varepsilon)^n v(W_k).$$

Es folgt:

$$\alpha \leq \frac{v(T(W_k))}{v(W_k)} = (1 + \varepsilon)^n \cdot |\det(A)| \leq (1 + \varepsilon)^n \max_{x \in W} |\det(DT(x))|$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. gewählt werden kann, folgt die Beh. $\square$

Hilfssatz 2

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum, dessen Rand eine Nullmenge ist, dann gelten:

$$\min_{x \in K} |\det(DT(x))| \cdot v(K) \leq v(T(K)) \leq \max_{x \in K} \dots$$

Beweis: $v(K) = 0 \quad \checkmark$

Es ist also nur im Fall $\text{Int}(K) \neq \emptyset$ was zu zeigen.

Wir überdecken die offene Menge $K^\circ = \text{Int}(K)$ nun durch abz. viele kompakte Quader-/Würfel W_k , die sich nur in K schneiden. Dann gilt:

$$V(K) = V(\text{Int}(K)) = \sum_{k=1}^{\infty} V(W_k).$$

Nachdem 4.5 und 6.8 gilt:

$$\begin{aligned} V(T(K)) &= V(T(\text{Int}(K))) = \sum_{k=1}^{\infty} V(T(W_k)) \\ &\leq \max_{x \in K} \varepsilon |\det(DT(x))| \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} V(W_k) \\ &= \max \varepsilon |\det(DT(x))| \beta V(K) \end{aligned}$$

die zweite Ungleichung. Die erste folgt in dem wir die Rolle von K und $T(K)$ vertauschen und

beachten, dass $S = T^{-1}$, $y = T(x)$, $x = S(y)$

$(DT(x))^{-1} = DS(y)$ gilt.

Also

$$\min_{y \in T(K)} \varepsilon |\det(DT(x))| \beta = \max_{y \in T(K)} \varepsilon |\det(DS(y))| \beta^{-1}. \quad (*)$$

Also die zweite Ungleichung für S von $T(K)$ gibt die erste für T und K . $\square$

Hilfssatz 3

Die Transformationsformel gilt für T auf φ deren Träger in V liegt. Dabei bezeichnet

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in V \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

den Träger von φ . Der Abschluss der Punkte, wo $\varphi \neq 0$ gilt.

Beweis: Da das Int. linear ist, genügt es den Fall

$\varphi = 1_Q$ wobei $Q \subset V$ ein abg. Quader ist z.B. Die

Integrierbarkeit von $(1_Q \circ T) |\det(DT(x))|$ ist klar, da

$1_Q \circ T$ beschränkt und $|\det(DT(x))|$ auf dem

Kompaktum $K = T^{-1}(Q) \subset V$ stetig ist. Bleibt

die Formel

$$\int_{T^{-1}(Q)} |\det(DT(x))| dx = \int_Q 1_Q dy = V(Q) \quad \text{z.B.}$$

Zu $\varepsilon > 0$ zerlegen wir $Q = \bigcup_{i=1}^N Q_i$ in komp. Teilquader so fein, dass für $S = T^{-1}$ gilt:

$$\max_{y \in Q_i} |\det(DS(y))| \beta - \min_{y \in Q_i} |\det(DS(y))| \beta < \varepsilon$$

Da $\frac{1}{|\det(DS(y))|}$ auf Q kompakt, glm. stetig ist, ist dies möglich. Die Q_i können so gewählt werden, dass für $i \neq j$ $Q_i \cap Q_j$ höchstens Randpunkte gemein haben. Für $K_i = S(Q_i)$ gilt dann

$$\max_{x \in K_i} |\det(DT(x))| \beta - \min_{x \in K_i} |\det(DT(x))| \beta < \varepsilon$$

und mit HS 2 folgt:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in K_i} |\det(DT(x))| \beta \cdot V(K_i) \\ & \leq \int_{K_i} |\det(DT(x))| dx \\ & \leq \max_{x \in K_i} |\det(DT(x))| \cdot V(K_i) \end{aligned}$$

und $\int_{K_i} |\det(DT(x))| dx = V(Q_i) < \varepsilon \cdot V(K_i)$,
da $Q_i \supset T(K_i)$. Da die Durchschnitte $K_i \cap K_j$
 $= S(Q_i \cap Q_j)$ Nm sind folgt:

$$\int_{S(Q)} |\det(DT(x))| dx = V(Q) \leq \varepsilon \cdot \kappa(S(Q))$$

$\varepsilon > 0$ gibt die Formel. $\square$

Hilfssatz 4

Sei f über der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ intbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfkt. φ mit Träger in V , so:

$$\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$$

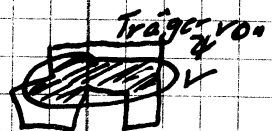
Beweis: Sei φ irgendeine Trpf. mit

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Wegen $|f - \varphi \cdot \chi_V| \leq |f - \varphi|$ gilt auch

$$\|f - \varphi \cdot \chi_V\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir approximieren nun die Funktion $\chi_V \cdot \varphi$ durch Trpf. mit Träger in V . Sei dazu B eine beschr. offene Menge die den Träger von φ umfasst. Sei



$M = \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n \}$. Sei A eine Vereinigung von endlich vielen komp. Quadern $\subset V \cap B$, die $V \cap B$ gut approx. etwa:

$$(0 \leq) V(V \cap B) - V(A) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dann ist $\varphi = \varphi_A$ eine Triplet mit Träger in $A \subset V$

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_A\|_1 &= \|\chi_{V \cap B} \varphi - \varphi_A\|_1 \\ &\leq M (V(B \cap V) - V(A)) \\ &\leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_A\|_1 &\leq \|\varphi - \chi_V \varphi\|_1 + \|\chi_V \varphi - \varphi_A\|_1 \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

Beweis der Transformationsformel:

Sei f intbar über V . nach HS4 $\exists$ eine Folge von Triplet φ_k mit

1) Der Träger von φ_k liegt in V .

2) $\|\varphi_k - \varphi\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Indem wir zu einer Teilfolge übergehen, können

außerdem

3) φ_k komp. pw. gegen φ außerhalb einer Nm $N \subset V$ (nach F.R.).

Wir betrachten nun

$$\tilde{\varphi}_k = (\varphi_k \circ T) / \det(DT)$$

$$\text{und } \tilde{f} = (f \circ T) / \det(DT).$$

Nach HS3 sind $\tilde{\varphi}_k$ über U intbar und die

Folge $(\tilde{\varphi}_k)$ bildet eine L^1 -CF.

$$\|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}\|_1 = \int_U |\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}| dx \stackrel{\text{HS3}}{=} \int_V |\varphi_k - \varphi| dy = \|\varphi_k - \varphi\|_1$$

Ferner komp. $\tilde{\varphi}_k$ außerhalb der Nm $T^{-1}(N)$ ggü $\tilde{f}$.

Nach F.R. ist $\tilde{f}$ über U intbar und für das Int.

$$\text{gilt: } \int_U \tilde{f}(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \tilde{\varphi}_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V \varphi_k(y) dy = \int_V f(y) dy.$$

Ist umg. $\tilde{F}$ über U int bar, so wenden wir obiges auf
 $S = T^{-1}V \rightarrow U$ an und erhalten die Intbarkeit von
 $(\tilde{F} \circ S) / \ker(\rho_S) = f. \square$