

Analysis III

14.11 Definition: Orientierung von Tangentialvektoren.

a) Eine Basis $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ heißt positiv orientiert, wenn

$$\det(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

b) Sei $(U, \sigma) \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale orientierte differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$; $T_p M$ der Tangentialraum. $v_1, \dots, v_k \in T_p M$ heißt positiv orientiert, wenn bezüglich einer positiv orientierten Kartesischen Einbettung

$$\varphi: U \rightarrow V \subset M$$

und $(D\varphi)_p: T_p U \cong \mathbb{R}^k \rightarrow T_p V = T_p M$ die Tangentialabbildung die Vektoren $((D\varphi)_p^{-1})(v_1), \dots, ((D\varphi)_p^{-1})(v_k)$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^k$ bilden. Insbesondere ist die Basis

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\sigma), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(\sigma) \in T_p M$$

positiv orientiert.

14.12 Definition: Sei $\Pi \subset G \subset \mathbb{R}^n$ eine Hypertfläche, d.h.

$(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Unter einer Einheitsnormalenvektorfeld verstehen wir eine stetige Abbildung auf normierte $\nu(x)$, die senkrecht auf $T_x \Pi$ steht. Da $T_x \Pi \subset \mathbb{R}^n$ Codimension 1 hat, ist $\nu(x)$ bis auf das Vorzeichen festgelegt.

$\nu(x)$ heißt positiv orientiert, wenn

$$\det(\nu(x), v_1, \dots, v_{n-1}) > 0$$

mit $v_1, \dots, v_{n-1}$ positiv orientierte Basis von $T_x \Pi$.

Bemerkung 14.13: Ist $w_1, \dots, w_{n-1}$ eine weitere positiv orientierte Basis der $T_p M$, so gilt

$$\det(v(x), w_1, \dots, w_{n-1}) > 0,$$

da unter Kartenumwechsel die Transformationsmatrix die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (D\varphi)(p) \end{array} \right)$$

hat, und $(D\varphi)(p) > 0$ gilt, wenn beide Karten gleich orientiert sind.

14.14 Satz: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $(n-1)$.

- Beitrag M eine Orientierung σ , dann gibt es genau ein Normalenvektorfeld $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, das bezüglich σ positiv ist.
- Ist $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Normalenvektorfeld, dann lässt sich M orientieren. Es gibt genau eine Orientierung bezüglich der ν positiv ist.

Beweis: a) Da $\nu(x)$ bis auf Vorzeichen bestimmt ist, legt die Orientierung von M $\nu(x)$ fest. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist. Dazu sei $f: M \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Gleichung von M , $M \cap V = \{f^{-1}(0)\}$, f differenzierbar, $\text{grad}(f(x)) \neq 0 \forall x \in V$. Dann ist

$$\nu(x) = \frac{\text{grad}(f(x))}{\|\text{grad}(f(x))\|}$$

bis auf Vorzeichen, also stetig.

b) Sei $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, $\varphi: U \rightarrow V \subset M \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte.
Dann sei φ im positiven Atlas, wenn

$$\nu(x), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}$$

positiv orientiert sind. Für eine weitere Karte $\tilde{\varphi}$ und $\varphi = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ transformieren sich die entsprechenden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \end{pmatrix}$$

$\det(D\varphi) > 0$ gilt genau dann, wenn $\varphi, \tilde{\varphi}$ verträglich sind. $\square$

14.15 Beispiel: 1) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Der Rand ∂K ist eine kanonische Orientierung, die durch das äußere Normalenvektorfeld induziert wird.

2) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und ω eine $(n-1)$ -Form.

Wenn wir ω mit Hilfe eines Vektorfeldes $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$,
dann ist

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Sei nun $K \subset G$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und
 $\Delta \subset K$ ein Kompaktum. In § 9 hatten wir das Integral

$$\int_{\Delta} \langle F, \nu(x) \rangle dS(x)$$

erklärt. Wir wollen dies mit $\int_K \omega = \int_{\Delta} \langle F, \nu(x) \rangle dS(x)$ vergleichen,
wobei ω die durch ν induzierte Orientierung ist.

11.17 Satz: Mit der Notation wie oben gilt

$$\int_A \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_{\langle A, \sigma \rangle} w,$$

wobei σ die von ν induzierte Orientierung ist.

Beweis: Indem wir w , bzw. F mit einer genügend feinen Unterteilung der 1 multiplizieren, können wir annehmen, dass $A \cap \text{supp}(w) = A \cap \text{supp}(F)$ ganz in einer Kartengröße $V \subset \mathbb{R}^n$ enthalten ist. Sei $\varphi: U \rightarrow V$ die zugehörige Parametrisierung.

Weiter können wir annehmen, dass die Karte die Gestalt

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

hat, nach eventueller Vertauschung der Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ und Verkleinern der Kartengröße, dabei $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Für eine geeignete Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$V = W \cap \{ (x_1, \dots, x_n) \in W \mid x_n - h(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \},$$

also

$$\tilde{\nu}(x) = \frac{(-\text{grad}(h), 1)}{\sqrt{1 + \|\text{grad}(h)\|^2}}$$

ist ein Normalenvektorfeld auf V , wobei wir $x = (x', x_n)$ die Koordinaten in W schreiben. Für ν gilt also

$$\nu|_V = \varepsilon \cdot \tilde{\nu}$$

für ein Vorzeichen $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Da Karte $\varphi: U \rightarrow V$ kann positiv oder negativ orientiert sein. Von vorläufig, hängt von Vorzeichen der Determinante

$$\det\left(v, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}\right) = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \|\text{grad}(h)\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x_1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}} & 0 & & 1 \\ 1 & \frac{\partial h}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\epsilon (-1)^{n-1}}{(1 + \|\text{grad}(h)\|^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Also: $\mathcal{U}$ ist positiv oder negativ orientiert, je nach dem ob $\epsilon (-1)^{n-1}$ positiv oder negativ ist.

$$\int_{(A, \sigma)} \omega = \epsilon (-1)^{n-1} \int_{\mathcal{U}(A)} \mathcal{U}^* \omega.$$

Als nächstes bestimmen wir $\mathcal{U}^* \omega$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^* \omega &= \mathcal{U}^* ((-1)^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n \\ &= (-1)^i \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \end{aligned}$$

und $\mathcal{U}^* ((-1)^{n-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^{n-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$, also

$$\mathcal{U}^* \omega = (-1)^{n-1} \underbrace{\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_i \circ \mathcal{U}) \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + f_n \circ \mathcal{U} \right)}_{:= \alpha(x)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

also

$$\int_{(A, \sigma)} \omega = \epsilon \cdot \int_{\mathcal{U}(A)} \alpha(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

Andererseits gilt

$$\langle F(\mathcal{U}(x)), \nu(\mathcal{U}(x)) \rangle = \frac{\alpha(x)}{(1 + \|\text{grad}(h)\|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\text{und } dS(x) = (1 + \|\text{grad}(h)\|^2)^{\frac{n}{2}} d^{n-1}x.$$

Also die Green'sche Gebirgsformel liefert sich raus und die Behauptung folgt. $\square$

14.18 Satz (Green'scher Integralsatz mit Differentialformen): Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$ -Form und $K \subset G$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂K versehen mit der kanonischen Orientierung. Dann gilt

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega.$$

Beweis: Nach 14.17 gilt $\int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$.

Nach dem klassischen Satz von Green gilt

$$\int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_K \operatorname{div}(F) d^n x.$$

(hierbei ist $F = (f_1, \dots, f_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$).

Nach §13 haben wir

$$d\omega = \operatorname{div} F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

damit folgt die Behauptung.

14.19 Beispiel: 1) Für

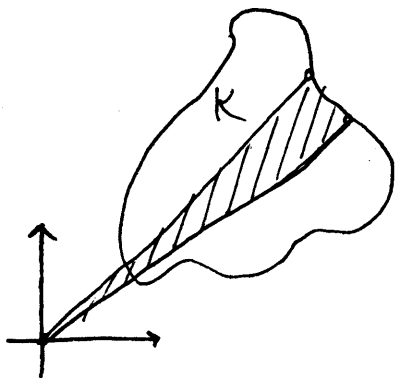
$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

gilt $d\omega = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, also $\operatorname{vol}(K)$ mit $K \subset \mathbb{R}^n$, K Kompaktum mit glattem Rand erfüllt

$$\operatorname{vol}(K) = \frac{1}{n} \int_K d\omega = \frac{1}{n} \int_{\partial K} \omega.$$

2) Speziell für $K \subset \mathbb{R}^2$, $\omega = x dy - y dx$ gilt

$$\operatorname{vol}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx.$$



Die schraffierte Fläche hat den Inhalt

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x & x + \delta x \\ y & y + \delta y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} x \delta y - y \delta x.$$

Grenzwertbildung liefert die Formel

$$\text{vol}(K) = \frac{1}{2} \int_K x dy - y dx.$$

□

§ 15 - Der Integralsatz von Stokes

15.1 Definition: Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M ist ein topologischer Hausdorff-Raum, für den jeder Punkt $x \in M \setminus \partial M$ eine Umgebung $U = U(x) \subset M$ hat, die vermöge $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph ist und jeder Punkt $x \in \partial M$ eine Umgebung U hat, so dass U homöomorph zu

$$V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times]-\infty, 0]$$

mit $\varphi(x) \in V \cap \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Eine differenzierbare Struktur auf M ist durch einen differenzierbaren Atlas gegeben, eine Orientierung ist durch einen orientierten Atlas gegeben. ∂M ist dann eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die kanonisch orientiert ist, falls M orientiert ist.

15.2 Satz (von Stokes): Sei $(M, \delta M)$ eine n -dimensionale ^{orientierte} kompakte Mannigfaltigkeit von $G \subset \mathbb{R}^n$ und ω eine $(n-1)$ -Form auf G . Dann gilt $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$.

Beweis: Es reicht, dies für w mit Träger in Kartengrößen
zu zeigen. Der Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes auf $\mathbb{R}^k$
greift (und vereinfacht sich). $\square$