1.13 Fundamentallemma

Für die charakteristische Funktion 1_A eines abgeschlossenen Quaders gilt:

$$\|1_A\|_1 = v(A) = \int 1_A \, dx$$

Beweis

Sei Q offener Quader mit $A \subset Q$, dann ist $1 \cdot 1_Q$ eine Hüllreihe für 1_A, also

$$\|1_A\|_1 \leq I(1_Q) = v(Q)$$

Da es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches Q mit

$$v(Q) < v(A) + \varepsilon$$

erhalten wir die Ungleichung $\|1_A\|_1 \leq v(A)$.
Die andere Ungleichung ist die wesentliche.
Hierfür verwenden wir die Kompaktheit von A:

Sei $\Phi = \sum_k c_k 1_{Q_k}$ eine Hüllreihe von 1_A.
Wir wollen $I(\Phi) \geq v(A)$ zeigen.
Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in A$ gibt es wegen

$$\Phi(x) \geq 1 = |1_A(x)|$$

einen Index $N(x)$ s.d. $\sum_{k=1}^{N(x)} c_k \cdot 1_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon$ (*)
Da die Q_k offen gilt (*) sogar in einer offenen Umgebung $U(x)$ von x.
Da A kompakt ist ex. endl. viele $x_1, \dots, x_p \in A$ s.d. die $U(x_i)$ die Menge A überdecken.

Wir setzen $N := \max_{i=1,\dots,p} \{x_i\}$.

...

Es gilt dann:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k 1_Q(x) \geq (1-\varepsilon)\cdot 1_A(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Es folgt $I(\Phi) \geq \sum_{k=1}^{N} c_k\, v(Q) \geq (1-\varepsilon)\, v(A)$

Da $\varepsilon>0$ bel. klein gewählt werden kann folgt nun $I(\Phi) \geq v(A)$ für jede Hüllreihe Φ von 1_A □

1.14 Lemma

Für jede Treppenfunktion φ auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\varphi\|_1 = \int |\varphi|\, dx$$

Beweis

Da φ und $|\varphi|$ die selbe L^1-Halbnorm haben können wir OE $\varphi \geq 0$ voraussetzen.

Sei $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^{r} d_i 1_{R_i} \quad (c_k, d_i \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ eine Darstellung von φ, wobei Q_k offene Quader sind, und R_i ~~aus~~ "entartete Quader", d.h. $v(R_i)=0$ sind.

Ist dann $R_i^* \supset R_i$ ein offener Quader mit $v(R_i^*) \leq \varepsilon$ so folgt, dass

$$\Phi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^{r} d_i 1_{R_i^*}$$

eine Hüllreihe von φ ist mit Inhalt

$$I(\Phi) = \sum_{k=1}^{s} c_k\, v(Q_k) + \varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{r} d_i$$

Es folgt $\|\varphi\|_1 \leq \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot v(Q_k) = \int \varphi\, dx$.

$\leadsto$

Umgekehrt sei A ein abgeschlossener Quader mit $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \notin A$ und sei $m = \max\{\varphi(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ $(<\infty)$

Dann ist
$$\psi := m \cdot 1_A - \varphi$$
eine nicht negative Treppenfunktion, für die nach dem ersten Teil des Beweises ebenfalls
$$\|\psi\|_1 \leq \int \psi \, dx \qquad (*)$$
gilt. Mit dem Fundamentallemma folgt
$$\int \varphi \, dx = \int (m \cdot 1_A - \psi) \, dx = m \cdot \int 1_A \, dx - \int \psi \, dx$$
$$\stackrel{F.L.}{=} m \cdot \| 1_A \|_1 - \int \psi \, dx = \| m \cdot 1_A \|_1 - \int \psi \, dx$$
$$\stackrel{(*)}{\leq} \| \varphi + \psi \|_1 - \|\psi\|_1 \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|\varphi\|_1$$

$\square$

1.15 Definition

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt Lebesgue-integrierbar, wenn es eine Folge φ_k von Treppenfunktionen gibt mit
$$\| f - \varphi_k \|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Der Grenzwert
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx := \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) \, dx$$
heißt das Lebesgue-Integral von f.

1.16 Bemerkung

(1) Für beliebige Treppenfunktionen φ und ψ gilt nach 1.6 & 1.11:

$$\left| \int \varphi \, dx - \int \psi \, dx \right| \leq \int |\varphi - \psi| \, dx = \|\varphi - \psi\|_1$$
$$\leq \|f - \varphi\|_1 + \|f - \psi\|_1$$

Die Folge $\left(\int \varphi_k \, dx\right)_k$ ist folglich eine Cauchy-Folge (falls $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$), also konvergent.

(2) Die gleiche Abschätzung zeigt, dass für jede in der L^1-Halbnorm approximierende Folge φ_k der gleiche Grenzwert herauskommt.

Das Lebesgue-Integral ist also wohldefiniert.

(3) Jede Treppenfunktion φ ist (Lebesgue-) integrierbar und das Lebesgue-Integral stimmt mit dem Integral der Treppenfunktion überein. Als approximierende Folge kann man z.B.

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots$$

wählen.

(4) Aus $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$ kann man nicht folgen, dass die Folge φ_k punktweise gegen f konvergiert. Später werden wir zeigen, dass für eine Teilfolge die punktweise Konvergenz "fast überall" gilt.

1.17 Satz

Mit f ist auch $|f|$ über $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\left| \int f \, dx \right| \leq \int |f| \, dx = \|f\|_1$$

Beweis

Sei (φ_k) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$.

Aus $\big| |f| - |\varphi_k| \big| \leq |f - \varphi_k|$ folgt aus der Monotonie der L^1-Halbnorm

$$\big\| |f| - |\varphi_k| \big\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1$$

Insbesondere folgt also $\big\| |f| - |\varphi_k| \big\|_1 \to 0$ und $|f|$ ist demnach Lebesgue-integrierbar.

Es gilt: $\left| \int f \, dx \right| = \left| \lim\limits_{k \to \infty} \int \varphi_k \, dx \right| \leq \lim\limits_{k \to \infty} \int |\varphi_k| \, dx \leq \int |f| \, dx$

Es bleibt noch $\|f\|_1 = \int |f| \, dx$ zu zeigen.

Hierfür verwenden wir

$$\|f\|_1 - \|f - \varphi_k\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1$$

Daraus folgt wegen $\|\varphi_k\|_1 = \int |\varphi_k| \, dx \longrightarrow \int |f| \, dx$

$$\|f\|_1 \leq \int |f| \, dx \leq \|f\|_1$$

□

Satz 1.18 (Rechenregeln)

Sind f und g L-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so gilt

(i) $\alpha f + \beta g$, $\overline{f}$ sind L-integrierbar mit

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f\, dx + \beta \int g\, dx$$

und $$\int \overline{f}\, dx = \overline{\int f\, dx}$$

(ii) Für reelles f und g mit $f \leq g$ gilt

$$\int f\, dx \leq \int g\, dx$$

(iii) Ist g zudem beschränkt, so ~~gilt~~ ist auch $f \cdot g$ L-integrierbar.

Beweis

(i) Seien (φ_k) und (ψ_k) approximierende Folgen von Treppenfunktionen von f und g. Dann ist $(\alpha \varphi_k + \beta \psi_k)_k$ eine approximierende Folge für $(\alpha f + \beta g)$ und $(\overline{\varphi_k})_k$ ist eine approximierende Folge von Treppenfunktionen für $\overline{f}$.

(ii) Nach Satz 1.17 gilt

$$\int (g-f)\, dx \overset{g \geq f}{=} \int |g-f|\, dx = \|g-f\|_1 \geq 0$$

(iii) Sei M eine obere Schranke für g. Zu jedem $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Treppenfunktion φ mit $\|f-\varphi\|_1 \leq \varepsilon/2 \cdot \frac{1}{M}$ und eine Treppenfunktion ψ mit $\|g-\psi\|_1 \leq \varepsilon/2 \cdot \frac{1}{m}$, wobei m obere Schranke von φ ist. ($\mathrm{Œ}$ $M, m > 0$)

$\rightsquigarrow$

...

Dann gilt
$$|f\cdot g - \varphi\cdot\psi| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f-\varphi|\cdot|g| + |\varphi|\cdot|g-\psi|$$
also
$$\|f\cdot g - \varphi\cdot\psi\|_1 \leq \|f-\varphi\|\cdot M + \|g-\psi\|_1\cdot m$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$f\cdot g$ lässt sich also durch Treppenfunktionen der Gestalt $\varphi\cdot\psi$ beliebig gut approximieren in der L^1-Halbnorm. $\square$

1.19 Folgerungen

(1) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist also genau dann integrierbar, wenn $Re(f)$ und $Im(f)$ integrierbar sind und es gilt
$$\int f\,dx = \int Re(f)\,dx + i\cdot\int Im(f)\,dx$$

(2) Sind $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist auch
$$\max(f,g) = 1/2\,(f+g+|f-g|)$$
und
$$\min(f,g) = 1/2\,((f+g) - |f+g|)$$
integrierbar.

Insbesondere sind $f^+ = \max(f,0)$ und $f^- = \max(-f,0)$ integrierbar.

f^+ und f^- heißen Positiv- & Negativteil von f und es gilt $f = f^+ - f^-$

1.20 Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}^*$ eine Funktion. Unter einer <u>trivialen Fortsetzung</u> von f auf $\mathbb{R}^n$ verstehen wir die folgende Fkt

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

f heißt <u>L-integrierbar</u>, wenn die triviale Fortsetzung f_A über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

In diesem Fall heißt

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)\,dx$$

das <u>Lebesgue-Integral von f über A</u>.

Ferner definieren wir

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$$

1.2.1 Bemerkung

(1) Satz 1.17 und seine Folgerungen gelten sinngemäß auch für die Integration über Teilmengen des $A \subset \mathbb{R}^n$. Insbesondere sehen wir, dass die Teilmenge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen

$$\mathcal{L}^1(A) = \{ f : A \to \mathbb{C} \mid f \text{ L-integrierbar über } A \}$$

einen $\mathbb{C}$-VR bildet.

Für $f \in \mathcal{L}^1(A)$ gilt

$$\|f\|_{1,A} = \int_A |f|\,dx$$

(2) Wird das Lebesgue-Integral auf andere Weise (wie zB im Forster) eingeführt, so wird die Gleichung $\|f\|_{1,A} = \int_A |f|\,dx$ oft als Def. der L^1-Halbnorm und $\mathcal{L}^1(A)$ herangezogen.

(3) Im ersten Semester hatten wir das Riemann-Integral für Funktionen f auf einem abgeschl. Intervall $[a,b]$ erklärt, die beliebig gut bzgl. der Maximumsnorm

$$\|h\|_\infty := \max\{|h(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

durch Treppenfunktionen approximiert werden.
Ist (φ_k) eine Folge von Treppenfunktionen auf $A = [a,b]$ mit $\|f - \varphi_k\|_\infty \to 0$, so hatten wir das Riemann-Integral als

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k(x)\,dx$$

erklärt.
Da $|h_A| \leq \|h\|_\infty \cdot 1_A$ gilt $\|h_A\|_1 \leq (b-a)\|h\|_\infty$

$\|f - \varphi_k\|_\infty \to 0$ impliziert also $\|f - \varphi_k\|_{1,A} \to 0$

Es folgt

<u>1.22 Satz</u>

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, dann ist f über $A = [a,b]$ auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein:

$$\int_{[a,b]} f\,dx = \int_a^b f\,dx$$

$\square$