

6.11 Korollar

Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b$ (A orth. Mat.)

$\Rightarrow K \subset \mathbb{R}^n$ messbar $\Rightarrow T(K)$ messbar und

$$V(K) = V(T(K)).$$

Beweis: Es ist $DT = A$, also ist $\det(DT) = \pm 1$,
da A orth. Mit der Int. (Transformations)-
formel folgt:

$$V(T(K)) = \int_{T(K)} 1 \, dy = \int_K 1 \cdot |\det(DT)| \, dx = \int_K 1 \, dx = V(K).$$

7 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

7.1 Erinnerung

Sei $M \subset \mathbb{R}^n, p \in M, k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann
ist äquivalent:

a) $\exists$ offene Umgebung U von $p \in M$, eine α -mal
stetig diffbare reg. Abb. $F = (F_1, \dots, F_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ s.d. $U \cap M = \{x \in M \mid F_1(x) = \dots = F_{n-k}(x) = 0\}$

b) $\exists$ Umg U von $p \in \mathbb{R}^n$, V von $0 \in \mathbb{R}^k$ und eine
 α -mal stetig diffbare reg. Abb. (inj.) $\varphi: V \rightarrow U$
mit $\varphi(0) = p$ und $\varphi(V) = U \cap M$.

Ist diese Bed. erfüllt $\forall p \in M$, so heißt M eine
 k -dim. α -mal stetig diffbare M. Faltigkeit.
 $F_1(x) = \dots = F_{n-k}(x) = 0$ heißt lok. GLS für M .

$\varphi: V \hookrightarrow U \cap M$ heißt lok. Parametrisierung.

$\psi := \varphi^{-1}: U \cap M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ heißt Karte von M .

$\varphi(V) = U \cap M$ heißt Kartengebiet.

Der Tangentialraum einer UM $M \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt
 $p \in M$ ist

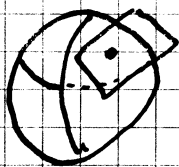
$$T_p M = \ker(DF(p)) = \text{Bild}(D\varphi(0)).$$

$T_p M$ ist ein k -dim UVR von $\mathbb{R}^n$. Eine Über-
deckung $U = \bigcup U_i$ durch Kartengebiete von M heißt

Atlas $\varphi: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^k$

7.2 Beispiele

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$ ist eine 2-dim UM von



$\mathbb{R}^3$. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ ist eine Gleichung und $\varphi: (0; 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\cos(\alpha) \cos(\beta), \sin(\alpha) \cos(\beta), \sin(\beta)),$$

ist eine Parametrisierung. φ^{-1} ist eine Karte. Es

gibt noch weitere Karten, z.B. Für $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$

ist $\psi: U \cap S^2 \rightarrow V = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

eine weitere Karte mit zugehöriger Param. (Karte)

$$\mapsto (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \text{ (Stereographische Proj.)}$$

7.3 Plü

Wir wollen Plü auf UM int, indem wir die Int. auf die Int über Kartengebiete zurückführen.

Dabei müssen wir beachten, dass $D\varphi(0)$ die EV

$e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^k$ auf Vektoren $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^k$ abbildet,

die ein Parallelepiped / k -Spat aufspannen.

$$P(a_1, \dots, a_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i a_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

$P(a_i)$ kann k -dim Volumen ≤ 1 haben. Welche

Eigenschaften sollte das k -dim Vol. von k -Spats haben.

7.4. Satz

Die einzige Abbildung

$$D_k: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto D_k(a_1, \dots, a_k)$$

mit

$$(D_k 1) \quad D_k(a_1, \dots, 1 a_i, \dots, a_k) = 1/n \cdot D_k(\dots)$$

$$(D_k 2) \quad D_k(a_1, \dots, a_i + t a_j, \dots, a_j, \dots, a_k) = D_k(\dots)$$

$$(D_k 3) \quad D_k(a_1, \dots, a_k) = 1 \text{ falls } a_1, \dots, a_k \text{ ein System von}$$

zueinander orthogonormalen Vektoren bildet,
ist die Abb. $D_k(\dots) = \sqrt{\det(A^t \cdot A)}$ mit
 $A = (a_1, \dots, a_k) \in M(n \times k, \mathbb{R})$.

Beweis: $(D_k 1)$ charakterisieren D_k , da man lin.
unabh. Vektoren $a_1, \dots, a_k$ mit entspr. elementaren
Umformungen in ein orthogonormales System über-
führen kann. Mit lin. abb. und $(D_k 1) + (D_k 2)$
folgt: $D_k = 0$.

Um einzusehen, dass D_k die gewünschten Eigen-
schaften hat, bemerken wir, dass im Fall $(D_k 3)$
 $A^t \cdot A$ die 1 ist.

$(D_k 1)$ und $(D_k 2)$ folgen, da $(D_k 1)$ und $(D_k 2)$ der
Matrizenmult von rechts $A \mapsto A \cdot B$ mit einer
Matrix $B \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $\det(B) = 1$ oder
 $\det(B) = -1$ entspricht. Nach dem Det. mult. satz
folgt $\sqrt{\det((AB)^t (AB))} = \sqrt{\det(B^t A^t A B)}$
 $= \sqrt{\det(B)^2 \cdot \det(A)^2} = |\det(B)| \cdot \sqrt{\det(A^t A)}$. $\square$

7.5. Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dim diffbare LM und
 $\varphi: V \rightarrow M$ eine Param. einer Karte. Die Matrix
 $(g_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,k}$ mit $g_{ij}(t) := \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t) \right\rangle$
heißt metrischer Tensor oder Maßtensor, der
Param. φ und $g(t) := \det(g_{ij}(t))$ heißt die
Gramsche - Determinante. Nach 7.4 und 6.3 ist
für einen Punkt $t \in V \setminus \text{Vg}(\varphi)$ das Volumen des
 k -Spats, der von den Bildern der Einheitsvektoren
des $\mathbb{R}^k$, unter der Abb. $D\varphi(t): \mathbb{R}^k \rightarrow T_p M \subset \mathbb{R}^n$
(mit $p = \varphi(t)$) aufgespannt wird. Das von dem Maß-
tensor $(g_{ij}(t))$ beschr. Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^k$, ist

das Vermöge dem Iso.: $D\varphi(t): \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} T_p M \subset T_p \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k$
 auf $\mathbb{R}^k$ zugehörige Skalarprodukt (euklid.)

7.6. Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dim M und $F: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$
 eine Fkt, deren Träger in einem Kar. Gebiet liegt
 $\varphi(V) \subset M$ und Sei $\varphi: V \rightarrow M$ eine Param. von
 $\varphi(V)$.

F heißt über M integrierbar, wenn die Fkt

$$(F \circ \varphi) \sqrt{g}$$

über V integrierbar ist, und man setzt:

$$\int_M F(x) dS(x) := \int_V F(\varphi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} dt^k$$

dabei heißt $dS(x)$ das k -dim Vol. elem. und
 ist ein formales Symbol, dass uns daran erinnern

soll, dass wir die G-det in der Form $\sqrt{g(t)} dt^k$
 berücksichtigen müssen.

7.7. Satz

Das Int hängt nicht von der Param. ab
 ($\Rightarrow$ Wahldef.).

Beweis:



Sei $\tilde{\varphi}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U} := \tilde{\varphi}(\tilde{V}) \subset M$ eine weitere Param.
~~es~~ das Kartengebiet $\tilde{\varphi}(\tilde{V})$ den Träger von F
 enthält. Dann ist der Träger $\text{supp}(F)$ in
 $U \cap \tilde{U}$ enthalten. $W := \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U}) \subset V$ offen
 $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U}) \subset \tilde{V}$ offen.

und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi: W \rightarrow \tilde{W}$ ist ein Diffeom. Nach
 der KetR gilt: $D\varphi(t) = (D\tilde{\varphi}(\psi(t))) \cdot D\psi(t)$. Also

gilt nach der Transformal.:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \circ \psi \cdot \sqrt{g(\psi)} d^k s = \int_{\mathbb{R}^k} F \circ \psi \cdot \sqrt{g(s)} d^k s.$$

$$\stackrel{t \leftarrow s}{=} \int_{\psi(\mathbb{R}^k)} F \circ \psi(t) \sqrt{g \circ \psi(t)} \cdot |\det(D\psi(t))| d^k t$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^k} F \circ \psi(t) \sqrt{g(t)} d^k t = \int_{\mathbb{R}^k} F \circ \psi \cdot \sqrt{g(t)} d^k t$$

$$(*) \text{ gilt da } g(t) = \det[(D\psi(t))^* \cdot D\psi(t)]$$

$$= \det[(D\psi(t))^* \cdot (D\tilde{\psi}(\psi(t)))^* \cdot D\tilde{\psi}(\psi(t)) \cdot D\psi(t)]$$

$$= (\det(D\psi(t)))^2 \cdot (g(\psi(t)))$$

$$\Rightarrow |\det(D\psi)| \cdot \sqrt{g \circ \psi} = \sqrt{g}$$

Damit ist das Int. $\int_M F dS(x)$ für Fkt. erklärt,
deren Träger vollst. in einem Kartengebiet liegt.

Z.B. Beispiel

Wir betrachten $M = S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = R\}$. Mit

Kugelkoordinat. $\rho: (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\varphi, \psi) \mapsto (R \cos(\varphi) \cos(\psi), R \cos(\varphi) \sin(\psi), R \sin(\varphi))$$

erhalten wir, dass

$$V_2(S_R^2) = \int_{M \text{ u. } \pi} 1 dS(\varphi)$$

$$\text{Kompl. des Kartengebiets ist } \rightarrow \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi$$

$$\text{Also ist } \sqrt{g(\varphi, \psi)} = R^2 |\cos(\psi)|$$

$$\begin{aligned} D_p(\varphi, \psi) &= \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \cos(\psi) & R \cos(\varphi) \sin(\psi) \\ -R \cos(\varphi) \sin(\psi) & R \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ 0 & R \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ g_{ij}(\varphi, \psi) &= \begin{pmatrix} R^2 \cos^2(\psi) & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit ist

$$V_2(S_R^2) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 |\cos(\psi)| d\varphi d\psi = 4\pi R^2$$

Bem. Das $g_{12} = 0$ ist bedeutend, dass die Kurven

$\varphi = \text{const}$ auf den Kurven $\psi = \text{const}$ senkrecht

stehen. Also Höhenkreise auf Längengraden.

