15.3 Satz (Lemma von Poincaré): Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Menge. Dann ist jede stetig differenzierbare geschlossene k-Form auf G exakt.

Beweis: Wir nehmen an, dass G sternförmig bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ ist und betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(t,x) \mapsto tx.$$

Sei $V = \varphi^{-1}(G)$, dann gilt $[0,1] \times G \subset V$. Sei ω auf G eine geschlossene k-Form. Wir betrachten

$$\sigma = (\varphi|_V)^* \omega.$$

σ ist geschlossen, da $d\sigma = d((\varphi|_V)^*\omega) = (\varphi|_V)^* d\omega = (\varphi|_V)^* 0 = 0$.
In Koordinaten $t, x_1, \dots, x_n$ heißt dies für σ

$$\sigma = \sum_{|I|=k} f_I \, dx_I + \sum_{|J|=k-1} g_J \, dt \wedge dx_J$$

$$0 = d\sigma = \sum_{|I|=k} \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \wedge dx_I + \sum_{|I|} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I - \sum_{|J|=k-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \wedge dx_i \wedge dx_J.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_{|I|=k} \frac{\partial f_I}{\partial t} dx_I = \sum_{|J|=k-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J.$$

Integration beider Seiten nach $t \in [0,1]$ liefert, da $\int_0^1 \partial f_I / \partial t \, dt = f_I(1,x) - f_I(0,x)$, und

$$\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(t,x)\,dt = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^1 g_J(t,x)\,dt\right),$$

dann $\eta = \sum_{|J|=k-1}\left(\int_0^1 g_J(t,x)\,dt\right)dx_J$ die gesuchte $(k-1)$ Form ist.

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_{|J|=k-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^1 g_J(t,x)\,dt\right) dx_i \wedge dx_J \\ &= \sum_{|J|=k-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}\,dt\right) dx_i \wedge dx_J \\ &= \sum_{|I|=k}\left(\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}\,dt\right) dx_I \\ &= \sum_{|I|=k}\left(f_I(1,x) - f_I(0,x)\right) dx_I . \end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}(t,x) = tx$ gilt für $\omega = \sum_{|I|=k} h_I\,dx_I$

$$\mathcal{H}^*\omega = \sum_{|I|=k} h_I(tx)t^k\,dx_I + \sum_{|J|=k-1} \tilde{h}_J t^{k-1}\,dt \wedge dx_J,$$

deshalb ist $f_I(1,x) = h_I(x)$ und $f_I(0,x) = 0$. Also ist

$$d\eta = \sum_{|I|=k} h_I\,dx_I = \omega. \qquad \square$$

<u>15.6 Definition:</u> Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann bezeichne

$$\Omega^k(G) = \{\omega \mid \omega \text{ ist } \mathcal{C}^\infty\text{-}k\text{-Form auf } G\}$$

den Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren k-Formen auf G. Die äußere Ableitung induziert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega^k(G) &\xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(G) \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

die sich zu einer Sequenz

$$0 \to \Omega^0(G) \to \Omega^1(G) \to \dots \to \Omega^n(G) \to 0$$

zusammen setzen. Da $d \circ d = 0$ ist dies ein Komplex, der sogenannte de-Rham-Komplex im Sinne der folgenden Definition:

15.5 Definition: Eine Folge von Abbildungen zwischen Vektorräumen (oder abelschen Gruppen)

$$\dots \to V_{-1} \xrightarrow{\varphi_{-1}} V_0 \xrightarrow{\varphi_0} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \to \dots$$

so dass $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0 \ \forall i$ nennt man einen Komplex. Es ist eine Entdeckung des 20. Jahrhunderts, dass Komplexe und deren (Co-)Homologie nützlich sind. Die mathematische Teildisziplin, die dies grundlegend studiert, heißt homologische Algebra.

15.6 Definition: Sei $(V_\cdot, \varphi_\cdot)$ ein Komplex, dann gilt wegen $\varphi_i \circ \varphi_{i-1} = 0$, dass $\operatorname{Im}(V_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} V_i) \subset \operatorname{Ker}(V_i \xrightarrow{\varphi_i} V_{i+1})$. Der Quotientenvektorraum

$$H^i(V) = \frac{\operatorname{Ker}(V_i \to V_{i+1})}{\operatorname{Im}(V_{i-1} \to V_i)}$$

heißt i-te (Co-)Homologiegruppe des Komplex. Der Komplex heißt exakt, wenn sämtliche Homologiegruppen verschwinden. Die Homologie ist also die Abweichung von der Exaktheit.

15.7. Speziell in der Situation von 15.4 nennt man

$$H^p_{DR}(G) = \frac{\operatorname{Ker}(\Omega^p(G) \to \Omega^{p+1}(G))}{\operatorname{Im}(\Omega^{p-1}(G) \to \Omega^p(G))}$$

die p-te de Rham Cohomologiegruppe von G. Wir können das Poincaré'sche Lemma auch so formulieren:

Für $G \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig gilt

$$H^p_{DR}(G) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=0 \\ 0 & \text{für } p>0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass die de Rham Cohomologie eines Gebiets G nur von der topologischen Gestalt von G abhängt. Sind $G \approx G'$ homöomorph, so gilt $H^p_{DR}(G) \cong H^p_{DR}(G')$. Beim Beweis dieser Tatsache spielt das Poincaré'sche Lemma eine entscheidende Rolle.

<u>15.8 Der Tangentialraum als Untermannigfaltigkeit</u>

Sei $M^k \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit. Dann können wir

$$\begin{array}{ccccc} TM & = \dot{\bigcup}_{p\in M} T_pM & \subset & T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & & \downarrow \\ M & & \subset & \mathbb{R}^n \end{array}$$

als 2k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$ auffassen.

<u>15.9 Beispiel:</u> Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, 0 ein regulärer Wert. Dann ist $M = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit und

$$TM = \{(x,v) \mid f(x)=0,\ \langle \operatorname{grad}(f(x)), v\rangle = 0\}$$

Die Fasern der Abbildung $\begin{array}{c} TM \\ \downarrow \\ M \end{array}$ $\begin{array}{c} T_pM \\ \downarrow \\ \ni p \end{array}$ sind alles $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Diese Situation ist so häufig, dass sie einen Namen bekommt.

<u>15.10 Definition</u>: Sei M^k eine k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein Vektorbündel E vom Rang r über M ist eine $(r+k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit E zusammen mit einer Abbildung $p: E \to M$, so dass alle Fasern $E_x = p^{-1}(x)$ die Struktur eines r-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums tragen und p lokal trivial ist, d.h. $\exists\, \mathcal{U} = \{U_i\}$ Überdeckung von M und Diffeomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$, die linear in den Fasern ist.

<u>15.11 Beispiele</u>: 1) Es sei M beliebig, $r > 0$, dann ist $E = M \times \mathbb{R}^r$ das triviale Vektorbündel vom Rang r über $\mathbb{R}^n$
2) Sei $M = S_1$, dann lässt sich das Möbiusband als Teil eines Rang-1-Vektorbündels E über S_1 interpretieren. E ist $\not\cong S_1 \times \mathbb{R}$ (nicht trivial).

Um dies einzusehen brauchen wir einen weiteren Begriff.
<u>15.12 Definition</u>: Sei $p: E \to M$ ein Vektorbündel. Eine stetige differenzierbare Abbildung $s: M \to E$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_M$ heißt ein Schnitt in E.

Mit diesem Begriff können wir in Beispiel 2 E von $S_1 \times \mathbb{R}$ unterscheiden. Jeder Schnitt im Möbiusbündel mit nur endlich vielen Nullstellen hat mit Vielfachheit eine ungerade Anzahl von Nullstellen.

__Beispiel:__ $M = G(k,n) = \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ ist k-dimensionaler Untervektorraum$\}$ hat ein tautologischen Rang-k-Bündel

$$E_G = \{(p_0,v) \in G(k,n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in P\}$$

__15.13 Vektorbündel vermöge verkleben__

Sei M Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ eine offene Überdeckung, $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r, \mathbb{R})$ die der Cozykelbedingung

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = \varphi_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$$

Dann können wir auch Vektorbündel über M durch verkleben erklären:

$$E = \dot{\bigcup} U_i \times \mathbb{R}^r / \sim$$

Seien $(x,v) \in U \times \mathbb{R}^r$, $(x',v') \in U \times \mathbb{R}^r$. Dann schreiben wir

$(x,v) \sim (x',v')$, falls $x = x' \in U_i \cap U_j$, $v' = \phi_{ij}(v)$ gilt,

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Jedes Vektorbündel entsteht auf diese Weise. $E \to M$ Vektorbündel, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ offene Überdeckung von M,

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\cong"', "\varphi_i"] \arrow[d] & U_i \times \mathbb{R}^r \arrow[dl] \\
U_i &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_{ij} \times \mathbb{R}^r \arrow[dr] & p^{-1}(U_{ij}) \arrow[l, "\Phi_j"'] \arrow[r, "\Phi_i"] \arrow[d] & U_{ij} \times \mathbb{R}^r \arrow[dl] \\
& U_i \cap U_j = U_{ij} &
\end{tikzcd}$$

$$(x,v) \xmapsto{\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}} (x, \Phi_{ij}(x)v)$$

__15.14 Definition:__ Sei M eine k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^k\}$ ein Atlas

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

$$(x,v) \longmapsto (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x), \underbrace{D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(x)}_{\Phi_{ij}} \cdot v)$$

$$
\begin{tikzcd}
V_j \supset V_{ij} \times \mathbb{R}^r & U_{ij} \times \mathbb{R}^r \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] \arrow[d, dash] & V_{ij} \times \mathbb{R}^r \subset V_i \\
& U_{ij} &
\end{tikzcd}
$$

Durch Verkleben erhalten wir den Tangentialraum $TM \to M$ als Vektorbündel.

<u>Beispiel:</u> E, F Vektorbündel auf M, dann sind $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\Lambda^k E$, $S_e F$, E^* wieder Vektorbündel auf M mit Fasern $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$, $(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$, … und so weiter, und Cozykeln

$$\left(\begin{array}{c|c} \Phi_{ij}^E & 0 \\ \hline 0 & \Phi_{ij}^F \end{array}\right), \quad \Phi_{ij}^E \times \Phi_{ij}^F, \quad \Lambda^k \Phi_{ij}^E, \ldots, (\Phi_{ij}^E)^t$$

Insbesondere sind die Vektorbündel TM, T^*M, $\Lambda^k T^*M$ definiert. Eine differenzierbare k-Form auf M ist ein Schnitt ω

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^k T^*M \arrow[d, shift right] \\
M \arrow[u, shift right, "\omega"']
\end{tikzcd}
$$

in $\Lambda^k T^*M$.

<u>15.15 Satz:</u> Eine k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist orientierbar genau dann, wenn $\Lambda^k T^*M \cong M \times \mathbb{R}$ trivial ist.

<u>Beweis:</u> Haben wir einen orientierten Atlas, so liefert die Koordinaten $x_1, \ldots, x_k$ einen Schnitt $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ in $\Lambda^k T^*M|_U$.

Mit einer Teilung der 1 $\sum \rho_i = 1$ mit $Tr(\rho_i) \subset \mathcal{U}$, können wir $\rho_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ trivial zu einem Schnitt $M \to \Lambda^n T^* M$ und $\omega = \sum \rho_i \omega_i$ liefert einen nirgends verschwindenden Schnitt.