

2. Erste Bsp von L-integrier. Fkt.

2.1 Satz (kleiner Satz von Beppo Levi)

Zu $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gäbe es eine m.w. Folge (φ_k) von Treppenfkt. sodass

1) (φ_k) konv. punktweise gegen f .

2) Die Folge $(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dx)$, der Integrale ist beschränkt.

Dann ist f L-integrierbar und

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx.$$

Beweis: Aus $f - \varphi_k = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_{i+k} - \varphi_i)$ folgt mit der verallg. Δ -Ungl.:

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_k\|_1 &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \|\varphi_{i+1} - \varphi_i\|_1 = \sum_{i=k}^{\infty} \int |\varphi_{i+1} - \varphi_i| dx \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} (\int \varphi_{i+1} dx - \int \varphi_i dx) \\ &\quad \uparrow \\ &\text{wegen monoton wachsend.} \end{aligned}$$

Weil die Folge $(\int \varphi_i dx)$ m.w. und nach Var. 2 beschränkt ist, also konv. $\Rightarrow \|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k} 0$, d.h. f ist L-integrierbar und $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx \quad \square$

2.2. Lemma

Sei f eine nichtnegative stetige Fkt. (reell) auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist die triviale Fortsetzung f_U von f auf $\mathbb{R}^n$ punktweise die Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge von Treppenfkt.

Für den Beweis etwas Sprechweise:

Sei $\mathcal{T}$ eine nichtleere Menge von Funktionen auf einer Menge A mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann heißt $f: A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $f(x) = \sup \{ \varphi(x) \mid \varphi \in \mathcal{T} \}$ die obere Einhüllende von $\mathcal{T}$.

Ist $\mathcal{T}$ abzählbar, etwa $\mathcal{T} = \{ \varphi_1, \dots \}$, so ist die Einhüllende die Grenzfkt einer monoton wachsenden

Folge (φ_k)

$$\varphi_k(x) = \max \{ \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x) \}.$$

Beweis: Es genügt z.B., dass F_n obere Einhüllende einer abz. Menge von Tpfkt ist. $W_r(a)$ bezeichne den abz. Würfel mit $M \in \mathbb{R}^n$ und Kantenlänge $2r$. Sei nun J die Menge der Tpfkt.

$$\varphi_n = \max_{\varphi \in J} \varphi|_{W_r(a)}$$

wobei: $W_r(a) \subset U$ und

$$m_r = \min \{ f|_{W_r(a)} \}$$

und $r \in \mathbb{Q} > 0$, $a \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist J abzählbar und $F_n = \sup \{ \varphi \mid \varphi \in J \}$.

In der Tat, zu $\xi \in U$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, gibt es wegen der Stetigkeit von f und der Offenheit von U einen Würfel $W_r(a) \subset U$, sodass

$$\xi \in W_r(a)$$

$$f(x) \geq f(\xi) - \varepsilon \quad \forall x \in W_r(a).$$

Also $f(\xi) - \varepsilon \leq \varphi_n(\xi) \leq F_n(\xi)$ und das Lemma folgt. $\square$

2.3 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt. Dann ist f über U integrierbar.

Beweis: Wegen der Zergung in Im/Re und der Zerl. in pos. und neg. Teil genügt es $f \geq 0$ zu betrachten.

Nach dem Lemma ist F_n der punktweise Limes einer monoton wachsenden Folge von Tpfkt φ_k .

Bleibt zu zeigen, dass die Folge der Integrale $\int \varphi_k dx$ beschränkt ist, um den Satz von Beppo Levi anwenden zu können. Da U beschränkt ist, $\exists Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset Q$,

da f beschränkt $\exists M$ s.d. $f_2(x) \leq M \forall x \in \mathbb{R}^n$. Also

$$\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} M \quad \text{und daher}$$

$$\int \frac{1}{2} dx \leq M \cdot \int \frac{1}{2} dx = M \cdot V(Q). \quad \square$$

2.4. Satz

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f über A integrierbar.

Beweis: $\mathbb{C} \ni f \geq 0$. Wir stellen f als punktweisen GW einer monotonen Folge von Treppenfkt. dar.

Zu $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir sämtliche Quadrate

$$Q = \prod_{i=1}^n I_i$$

mit $I_i = [a_i, b_i]$ oder I_i mit

$$b_i - a_i = \frac{1}{2^k} \text{ und } a_i \in \frac{1}{2^k} \mathbb{Z}.$$

Zu Q sei $c_Q = \max \{ f_k(x) \mid x \in Q \cap A \}$. Dann ist wegen der Kompaktheit von A :

$$P_k = \sum_{Q \text{ mit } K \cap Q \neq \emptyset} c_Q \cdot 1_Q$$

eine endl. Summe, also eine Treppenfkt.

Wegen der Stetigkeit von f und Kompaktheit von K konv. (P_k) mit gegen f_k . Mit dem kleinen Satz von Beppo Levi angewendet auf $(-P_k) \wedge f_k$ folgt der Satz. $\square$

Notation

Sei $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^{m \times p}$ und $A \subset X \times Y = \mathbb{R}^n$. Zu $y \in Y$ bezeichne:

$$A_y = \{ x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y) \in A \}$$

2.5 Satz (kleiner Satz von Fubini)

X, Y wie oben $0 < p < \infty$. Sei $A \subset X \times Y$ kompakt oder offen und beschränkt und $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Fkt. $x \mapsto f(x, y)$ über A_y integrierbar. Die Fkt.:

$$F(y) := \int_{A_y} f(x, y) dx$$

ist über Y integrierbar und es gilt:

$$\int_Y F(x,y) d(x,y) = \int_Y \left(\int_{A_y} F(x,y) dx \right) dy$$

Beweis: a) Für A offen und beschr. und $F \geq 0$.

Sei (P_k) eine Folge von Trippelt. mit $P_k \nearrow F$, wie in 2.3. Für jedes $y \in Y$ ist dann $x \mapsto P_k(x,y)$ eine Trippelt auf X , die punktweise gegen $x \mapsto F(x,y)$ konv. Da A_y offen ist, ist $F(\cdot, y)$ integrierbar und

$$F(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_y} P_k(x,y) dx$$

$$P_k(y) = \int_{A_y} P_k(x,y) dx$$

ist eine Trippelt auf Y und $P_k \nearrow F$.

Die Folge der Int $\int_Y P_k(y) dy$ ist beschr., da nach dem Satz von Fubini für Trippelt.

$$\begin{aligned} \int_Y P_k(y) dy &= \int_{X \times Y} P_k(x,y) d(x,y) \\ &\leq \int_{X \times Y} F(x,y) d(x,y) < \infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ ist über Y integrierbar und

$$\int_Y F dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y P_k dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} P_k d(x,y) = \int_{X \times Y} F d(x,y).$$

b) Der Fall A kompakt geht analog durch Verwen-

dung der im Beweis zu 2.4 verwendete Folge von Trippelt. $\square$

3. Messbare Mengen und Nullmengen

3.1. Definition

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt L -messbar kurz messbar, wenn χ_A L -integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$v(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A dx = \int_A 1 dx \text{ das Volumen von } A.$$

3.2. Satz

Offene beschränkte und kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sind messbar.

Beweis: 2.3 & 2.4

3.3. Beispiel

1) Die Kreisscheibe $K_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$

Ist messbar. Für das Volumen (= Flächeninhalt) gilt:

$$\begin{aligned} \nu(K_r(0)) &= \int_{K_r(0)} 1 dx dy = \int_{[-r,r]} \left(\int_{[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]} 1 dx \right) dy \\ &= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2-y^2} dy = \pi r^2. \end{aligned}$$

2) usw.

3.4 Geometrische Deutung durch Figuren

In diesem Paragraphen verstehen wir ^{unter} eine Figur im $\mathbb{R}^n$ eine endl. Vereinigung von kompakten Quadern. $A = \bigcup_{i=1}^m Q_i$

Dann gilt:

Lemma. Jede offene U in $\mathbb{R}^n$ hat eine Ausschöpfung durch Figuren, d.h. $\exists$ Folge A_k von Figuren, sodass

1) $A_k \subset A_{k+1} \quad \forall k$

2) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = U.$

