

Z. 15 Beweis für bel. G.M.

Sei $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von M .

$K_{-1} := \emptyset$. Für jeden Punkt $x \in K_i \setminus K_{i-1}^\circ$ wählen wir ein $r > 0$ so klein, dass $\overline{K_r(x)} \cap M \subset K_{i+1}^\circ \setminus K_{i-2}$

und wie in Z. 13 ein $\varphi_x: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit Träger

$\overline{K_r(x)} \cap M$, der in einem Kartengebiet U_i liegt. Da

$K_i \setminus K_{i-1}^\circ$ kompakt ist, existieren endlich viele

Punkte und somit endlich viele Fkt $\varphi_{x_{i,1}}, \dots, \varphi_{x_{i,n_i}}$,

sol. $\sum_{j=1}^{n_i} \varphi_{x_{i,j}} > 0$ auf $K_i \setminus K_{i-1}^\circ$

und $\sum_{j=1}^{n_i} \varphi_{x_{i,j}} = 0$ außerhalb von $K_{i+1}^\circ \setminus K_{i-2}$. Die

Summe $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_{x_{i,j}}$ ist lokal endlich und $\varepsilon_{ij} := \frac{\varphi_{x_{i,j}}}{\varphi}$

gibt eine Zerlegung der Eins. Wir müssen lediglich

nach eine Abb. $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{i,j} \mathbb{N} \setminus \{1\}$ wählen und $\varepsilon_v = \varepsilon_{\rho(v)}$ setzen. Dann ist

$$\sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_v = 1. \quad \square$$

Z. 16. Korollar

Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist die Vereinigung abz. vieler Kartengebiete.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in M} \int |f| \varepsilon_i \eta_k = \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in M} \sum_{k=1}^{\infty} \int |f| \varepsilon_i \eta_k = \int |f| d\varepsilon \stackrel{coo}{<} \infty$$

Da die Doppelreihen abs. konv. sind, gilt nach dem Umordnungssatz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in M} \int |f| \varepsilon_i \eta_k d\varepsilon = \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in M} \int |f| \eta_k d\varepsilon < \infty$$

Zu 3): Analog zu 2) ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f \cdot \eta_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in M} \int f \eta_k \varepsilon_i d\varepsilon \\ &\stackrel{(**)}{=} \sum_{i \in M} \sum_{k=1}^{\infty} \int f \eta_k \varepsilon_i d\varepsilon = \sum_{i \in M} \int f \varepsilon_i d\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

2.13 Existenz der Zerlegung der Eins (M komp.)

Zu jedem $x \in M$ betrachten wir ein $\mathcal{U}_x \in \mathcal{U}$

(= Überdeckung von M) mit $x \in \mathcal{U}_x$ und ein

$r = r(x) > 0$, sei $K_r(x) \cap M \subset \mathcal{U}_x$. Mit

$$h_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad h_x(y) := \begin{cases} r^2 \cdot \|x - y\|_2^{-2}, & \text{falls } y \in K_r(x) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist dann $\varphi_x := h_x|_M$ eine stetige nicht neg. Fkt. mit Träger $= K_r(x) \cap M \subset \mathcal{U}_x$.

(Wollen wir, dass φ zudem diffbar wird, so

können wir h_x mit der Fkt $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) =$

$e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x > 0$, 0 sonst komponieren und stattdessen

$\varphi_x := (g \circ h_x)|_M$ betrachten.)

Die offenen Mengen $V_x := K_r(x) \cap M$, $x \in M$ überdecken

M . Wegen der Kompaktheit von M , gibt

es daher endlich viele $x_i \in M$ ($i=1, \dots, N$) so

daß $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_N} = M$ ist. Sei nun $\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_{x_i}$. Dann

gilt $\varphi > 0$ auf M und $\varepsilon_i = \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}$, $\varepsilon_j = 0$ $j > N$

ist eine Zerlegung der Eins,

$$1 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \quad \square$$

2.14 Lemma

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine LM. Dann $\exists$ komp. Ausschöpfung. $\square$

7.12 Satz

Dieses Int. ist wohldef. (hängt nicht von der Wahl der Überdeckung ab).

Beweis: Es sei $\mathcal{E}_k$ eine weitere, einem Atlas untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann ist folgendes z.z.

1) $\eta_k \cdot f$ ist integrierbar $\forall k$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \int |f| \eta_k ds < \infty$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \int f \eta_k ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int f E_k ds$$

Zu 1): Die Fkt $f \eta_k$ hat Träger in einer Karte, da η_k Träger in einer Karte hat. Nach Vor. sind die $f E_k$ integrierbar. Da die η_k beschr. und stetig sind, ist also jede Fkt $f E_k \cdot \eta_k$ über die Karte von E_k und die Karte von η_k integrierbar (Satz 7.7).

Ferner gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f| E_k \cdot \eta_k ds \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int |f| E_k ds = \int |f| ds < \infty$$

Nach dem Satz über monotone Konv. ist also

$$|f| \cdot \eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} |f| E_k \cdot \eta_k$$

über das zu η_k zugehörige Kartengebiet integrierbar und

$$\int |f| \eta_k ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int |f| E_k \cdot \eta_k ds < \infty \quad (*)$$

Zu 2): Es ist $|f| E_k$ eine über das Kartengebiet von E_k integrierbare Majorante der PS der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f E_k \eta_k$.

Nach dem Satz von Lebesgue auf diesem Kartengebiet gilt daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int f E_k \cdot \eta_k ds = \int f E_k ds$$

und analog

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f| E_k \cdot \eta_k ds = \int |f| E_k ds.$$

Es folgt

7.9. Definition

Unter einer Zerlegung der Eins auf einer LHM M versteht man eine Familie von stetigen Funktionen

$$E_i : M \rightarrow [0, 1] \quad i \in N,$$

mit folgenden Eigenschaften.

1) Die Familie $\{E_i\}_{i \in N}$ ist lokal endlich, d.h.

$\forall x \in M \exists$ offene Überdeckung $V_x \subset M$ von $x \in M$

sol. $E_i|_{V_x}$ für $i \in N$ auf endl. viele Ausnahmen

gleich Null ist.

$$2) \sum_{i=1}^{\infty} E_i(x) = 1 \quad \forall x \in M.$$

3) Ist $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von M (z. B. durch Kartengebiete), so heißt die Zerlegung der Eins $\{E_i\}_{i \in N}$ der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnet, wenn zusätzlich gilt:

$\forall i \in N$ ist der Träger $\text{supp}(E_i)$ in genau einer der Überdeckungsmengen enthalten.

7.10. Satz

Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ einer LHM $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins.

7.11. Definition

Eine Fkt $f: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf einer LHM $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt auf M integbar, wenn bzgl. einer Kartenüberdeckung mit untergeordneter Zerlegung der Eins $\{E_i\}$ jeder der Fkt $E_i \cdot f$ auf M integbar ist (in einer Karte) und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_M |E_i \cdot f| \, d\lambda < \infty.$$

Dann ist:

$$\int_M f \, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M E_i \cdot f$$