Kapitel 1

Stereographische Projektion

1.1 Einleitung

Als Hinführung zur Streographischen Projektion werden zunächst die Polarkoordinaten vorgestellt. Dabei wird auf ihre Eigenschaften im direkten Vergleich zu den kartesichen Koordinaten kurz eingegangen. Maple ermöglicht die graphische Darstellung dazu. Eine Möglichkeit, wie man diese im direkten Vergleich dynamisch vorführen kann, wird in Form einer MathApp, die nativ von Maple bereitgestellt wird, gezeigt. Auch eine Vorgehensweise zum Einbau in ein eigenes Worksheet wird kurz dargelegt. Die Riemannsche Zahlenkugel wird im Hinblick auf die stereographische Projetkion aufgegriffen um den Punkt unendlich verständlich zu machen. Wie man letzlich zur stereographischen Projektion gelangt und einige Eigenschaften werden erläutert.

1.2 Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten dienen zur Beschreibung von Problemen, die eine kreisförmige Symmetrie aufweisen. Wie ihr Name eindeutig erkennen lässt handelt es sich um Kreiskoordinaten. Dieses Koordinatensystem ist zweidimensional und wird durch den Abstand zweier Punkte und den Winkel zur einer festgelegten Achse charakterisiert. Genauer ist der Abstand eines Punktes P zum Ursprung gemeint, der mit r wie Radius bezeichnet wird, wie in Abbildung 1.1 gezeigt. Die zweite Koordinate ergibt sich aus dem Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$, zwischen der x-Achse und der Strecke $\bar{O}P$. Die Transformationsregeln zwischen den kartesichen und den Polrakoordinaten sind gegeben durch

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

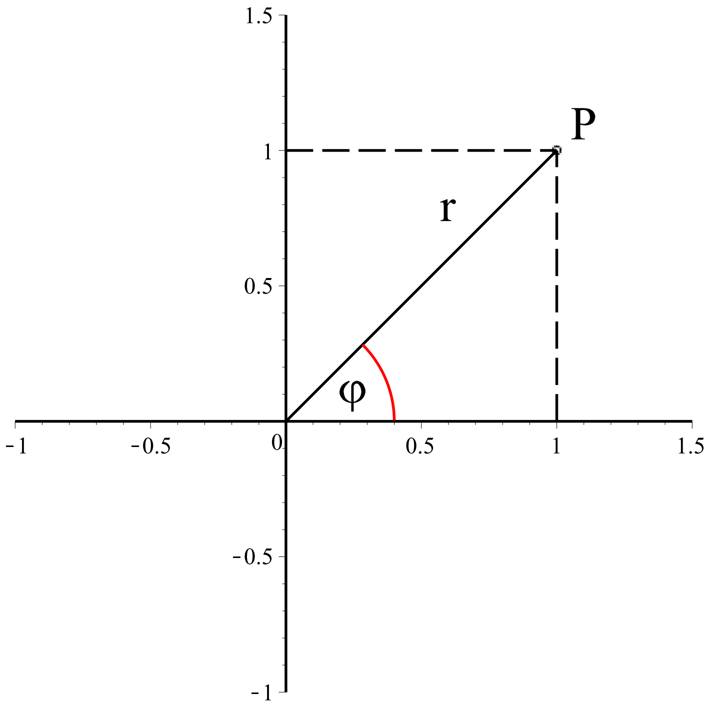

Abbildung 1.1: Darstellung des Zusammenhangs zwischen kartesischen- und Polarkoordinaten

Sicher ist schnell ersichtlich, dass die Koordinatenpaare für die der Radius r den Wert 0 annimmt $(r = 0, \varphi)$ auf den Punkt (0,0) abgebildet werden.
Die Koordinatenlinien des kartesichen Koordinatensystems sind Geraden parallel zur x- bzw. y-Achse, wie in Abbildung 1.2 zu erkennen ist, die sich gegenseitig mit einem Winkel von 90° schneiden. Daher bildet dieses Koordinatensystem ein orthogonales System. Hingegen bestehen die Koordinatenlinien des Polarkoordinatensystem aus Geraden (r-Linie, φ=const.), die sich alle in einem Punkt, dem

Ursprung, schneiden und konzentrischen Kreisen mit Radius r um den Ursprung (φ-Linien, r=const.), siehe dazu auch Abbildung 1.2. Deswegen wird es als krummliniges Koordinatensystem bezeichnet. Da aber die Linien lokal rechtwinklig sind, spricht man auch von einem krummlinig-orthogonalen Koordinatensystem.

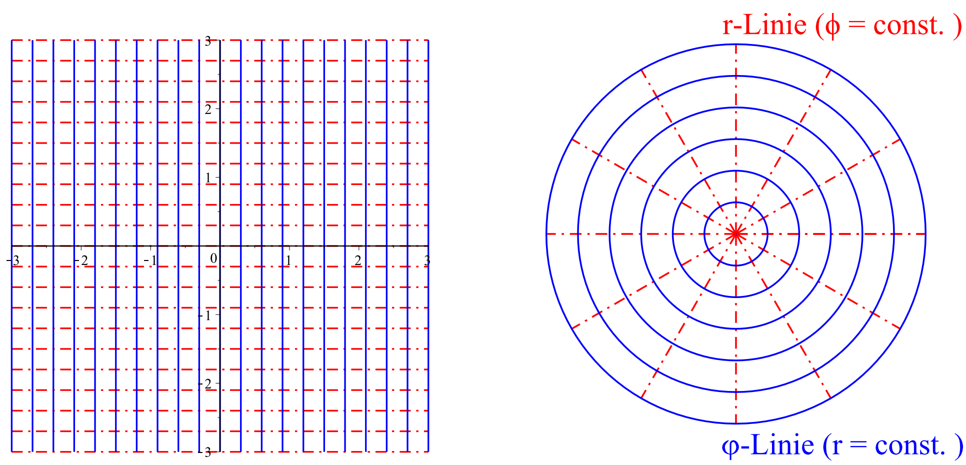

Abbildung 1.2: Koordinatenlinien der kartesischen und Polarkoordinaten.

1.2.1 MathApp

Maple bringt nativ bereits einige Applikationen mit, die man in sein eigenes Maplesheet einbauen kann. Sicher gibt es verschiedene Möglichkeiten dies zu verwenden. Mein Ziel war es an der Stelle zu zeigen, wie man dies umsetzten könnte. Es folgt eine kurze Zusammenfassung über die Vorgehensweise, die ich im Vortrag eingesetzt habe. Verwendet wurde die MathApp zum Thema Polarkoordinaten. Sie beinhaltet zwei Koordinatensysteme, einmal das kartesische und das Polarkoordinatensystem, die simultan und dynamisch den ausgewählten Punkt zeigen. Es besteht zusätzlich die Möglichkeit diesen Punkt im Bogenmaß oder Gradmaß darzustellen. Dazu wird in Maple zunächst über die Karteikarte „Start.mw“ die Option „Visualization“ und dort der Ordner „Cartesian and Polar Coordinates“ ausgewählt und dort die Applikation „Polar Coordinates“ aufgerufen. Diese enthält einige wichtige Informationen über die Polarkoordinaten und die entsprechende App. Es existieren mehrere Möglichkeiten diese für den eigenen Zweck einzusetzen, hier wird nun die im Vortrag gezeigte Version beschrieben. Unter dem Menü-punkt „Edit“ in Maple ruft man den Startup Code auf und kopiert diesen in das gleiche Fenster des eigenen Worksheets. Dann müssen in diesem Worksheet die Objekte „Plot“ und „Radio Button“ aus dem „Components“ Menü jeweils zweimal hinzugefügt werden. Da im Startup Code sowohl der Plot als auch die Radio Buttons bestimmte Eigenschaften zugewiesen bekommen und auch den dort verwendeten Namen besitzen müssen, müssen bei jedem einzelnen Objekt die entsprechenen Eigenschaften angepasst werden. Dazu gehören die „Component Properties“ in denen der Name z.B. „Cartesian“ und die Options entsprechend dem Plot in der MathApp übernommen werden müssen. Dazu genügt ein Rechtsklick auf den Plot, durch den dann das Menü mit „Component“ angezeigt wird. Insgesamt müssen dabei also die „Plot Properties“ , „Edit Click Action“ , „Edit Drag End Action“ und „Edit Dragged Action“ von den Plotobjekten aus der MathApp übernommen werden. Selbiges gilt für die Radio Buttons: Dort sind es die Einstellungen unter „Component Properties“ und „Edit Click Action“ . Anschließend das Worksheet speichern, schließen und wieder öffnen und die Meldung zum Ausführen des Startup Codes bestätigen. Nach Auswahl des entsprechenden Manipolators kann diese App dynamisch eingesetzt werden.

1.3 Riemannsche Zahlenkugel

Die Menge der komplexen Zahlen wird $\mathbb{C}$ genannt. In einigen Fällen, vor allem bei Integrationswegen in der komplexen Ebene, benötigt man aber zusätzlich den „Punkt“ im Unendlichen. Damit erhält man den Abschluss der Menge $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dass es sich wirklich um einen Punkt handelt, erkennt man sehr gut bei der Projektion der komplexen Ebene auf die Riemannsche Zahlenkugel. Die Riemannsche Zahlenkugel ist eine Riemannsche Fläche zusammen mit dem Punkt unendlich. Diese stellt eine Kompaktifizierung der komplexen Ebene dar. Unter Kompakt wird dabei bezeichnet, dass jede Folge von Elementen aus einer Menge A eine konvergente Teilfolge mit einem in A liegenden Grenzwert besitzt.

1.4 Eigenschaften der Stereographischen Projektion

Die Stereographische Projektion ist eine Abbildung von der Ebene auf die Einheitssphäre bzw. von der Kugel auf die Ebene. Man betrachtet also zunächst die

Einheitskugeloberfläche

$$K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und nennt den Punkt $N = (0, 0, 1)$ den Nordpol und $S = (0, 0, -1)$ den Südpol, wobei wir ersteren als Projektionszentrum wählen. Dann bilden der Punkt $P = (x, y, z) \in K$, der nicht gleich N oder S ist zusammen mit dem Norpol eine eindeutige Gerade im Raum, die durch

$$g(t) = (0, 0, 1) + t[(x, y, z) - (0, 0, 1)]$$

parametrisiert ist. Da der Richtungsvektor nicht parallel zu einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene ist, ergibt sich ein Schnittpunkt zwischen der Gerade und der Ebene. Dieser stellt den durch die stereographische Projektion projizierten Punkt der Kugeloberfläche auf die Ebene dar. Die stereographische Projektion, hier von Ebene zur Kugeloberfläche, kann also durch

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

dargestellt werden. Durch sie ist es möglich Karten einer Kugeloberfläche anzufertigen, welche allerdings nicht längenerhaltend sind. Bei der Abbildung eines Rechteckgitters würden sich entsprechend keine klassischen Längen und Breitenkreise ergeben sondern sich schneidende Teilkreise die einen gemeinsamen Punkt im Unendlichen liegen haben, vgl. Abbildung 1.3. Sie hat aber auch erhaltende Eigenschaften: Sie erhält zum einen den Winkel bei der Projektion und zum anderen auch bestimmte Kreise auf der Kugeloberfläche. Mittels des „Explore“ Befehls wurde eine entsprechende Grafik erzeugt, die es durch die Schieberegler ϕ und θ erlaubt die Kugel zu öffnen und durch die Regler *Ebene* und $Pfeillnge$ sowohl die Lage der Ebene als auch die Länge des Projektionspfeils zu variieren, vgl Abbildung 1.4. Es ist daran deutlich zu erkennen, dass ein Kreis bei der Projektion erhalten wird wenn es bspw. ein Breitenkreis ist. Hingegen werden Längenkreise in Form einer Geraden auf die Ebene abgebildet, also nicht erhalten. An der Grafik zwar erarbeitbar aber nicht geeignet durchführbar sind Kreise zu beobachten, die auf der Kugloberfläche liegen und den Norpol beinhalten. Diese Kreise werden auch auf eine Gerade abgebildet. Hingegen werden Kreise, die den Norpol nicht enthalten, wiederum bei der Projektion erhalten. Wählt man als Projektionsebene die Äquatorebene dann werden die obere Halbkugel auf Punkte außerhalb des Äquatorkreises abgebildet und die untere Halbkugel auf Punkte innerhalb. Hinzu kommt, dass man den Punkt im Unendlichen nun hervorragdend erkennen kann, denn bei der Ausrichtung des Pfeils parallel zu Projektionsebene, ergibt sich nur das Projektionszentrum als Schnittpunkt mit der Kugel. Die Winkelerhaltung der stereographischen Projektion wird im Folgenden behandelt.

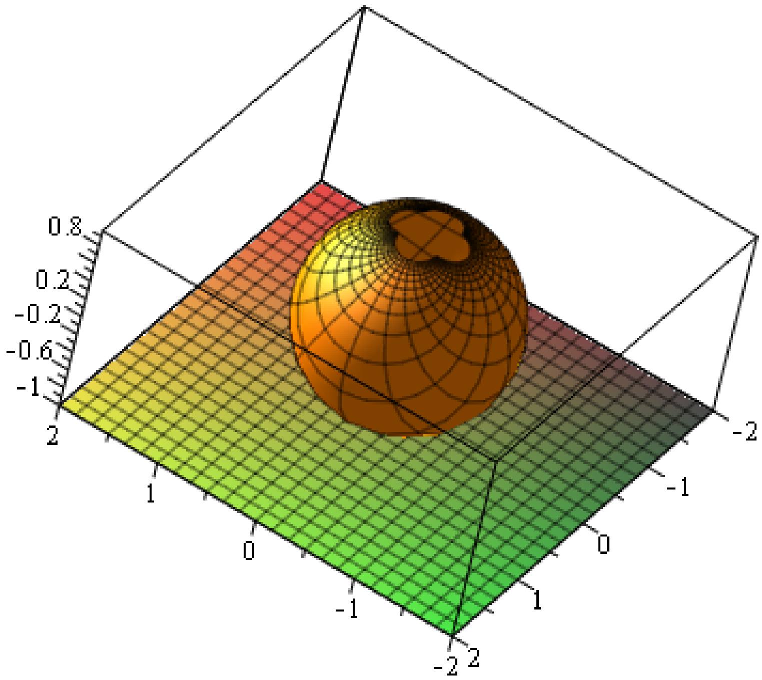

Abbildung 1.3: Verdeutlichung der Projektion eines Rechteckgitters auf die Kugeloberfläche.

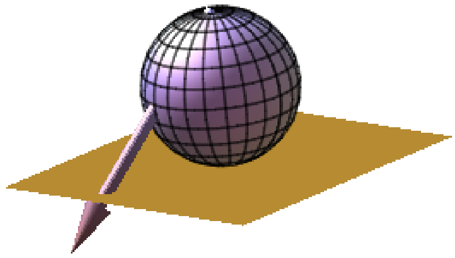

Abbildung 1.4: Graphik zur Erarbeitung der stereographischen Projektion.

1.4.1 Winkeltreue

Betrachtet man die zwei Kurven (rot und grün) auf der Kugeloberfläche in Abbildung 1.5, dann ist deren Schnittwinkel durch den Schnittwinkel ihrer Tangenten gegeben. Diese wurde mit dem Befehl „Explore“ erstellt welcher es ermöglicht einzelne Parameter zu variieren: Hier kann z.B. die Kugel zum einen horizontal und zum anderen vertikal durch die Schiebergeler φ und θ geöffnet werden.

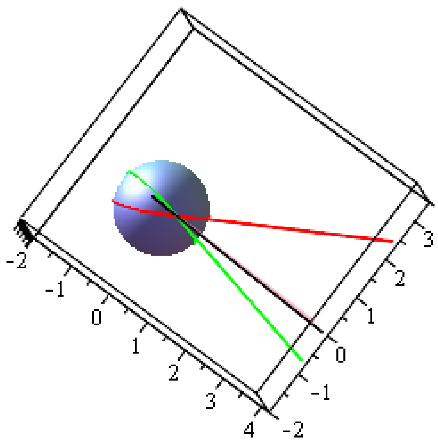

Abbildung 1.5: Schnittpunkt der beiden Kurven auf der Kugeloberfläche mit Tangenten in der jeweiligen Farbe.

Die Tangenten in diesem Schnittpunkt sind ebenfalls Tangenten an die Kugeloberfläche. Winkeltreue bedeutet, dass der Schnittwinkel der beiden Kurven durch die Projektion nicht verändert wird. Erweitert man dazu die bisherige Zeichnung um die stereographische Projektion des Punktes P auf die Ebene und die Tangente an den Punkt P, so ergeben sich die Dreiecke Δ**ABP** und Δ**ABP'**. Deren Höhen durch den Punkt F gekennzeichnet sind. Dazu muss in der Graphik über die Schieberegler a und b die Darstellung der Ebene angepasst werden und durch den Schieberegler p die Beschriftung sichtbar gemacht werden, wie in Abbildung 1.6 zu sehen ist. Mittels eines Achsenschnitts durch den Punkt P kann man die Schritte, die zum Beweis notwendig sind, auf einfache geometrische Überlegungen reduzieren, vgl. dazu die Abbildungen 1.7 und 1.8.

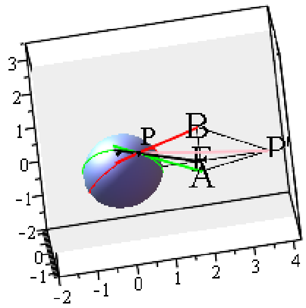

Abbildung 1.6: Erweiterung der Zeichnung durch die stereographische Projektion des Punktes P auf die Ebene und die Tagente an die Kugeloberfläche im Punkt P.

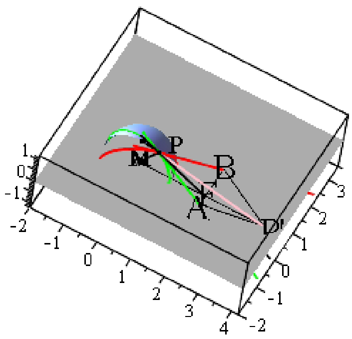

Abbildung 1.7: Achsenschnitt durch den Punkt P im 3D-Modell.

Betrachten wir nun den Achsenschnitt durch den Punkt P, wie in der Abbildung 1.8 dargestellt. Wir sehen, dass das Dreieck Δ**PNM** ein gleichschenkliges Dreieick ist mit Spitze **M** und dem Basiswinkel ϵ. Die Tangente an den Kreis im Punkt **P** steht senkrecht auf dem Radius, also der Strecke $\bar{M}P$, welche mit der Tangente demnach $90°$ einschließt. Infolgedessen ergibt sich der Winkel $\alpha = \angle$ **FPP'** zu $\alpha = 180° - 90° - \epsilon$ und für den Winkel $\angle$ **FP'P** zu $180° - \epsilon - 90° = \alpha$, woraus folgt, dass das Dreieck Δ**FP'P** ebenfalls gleichschenklig ist.

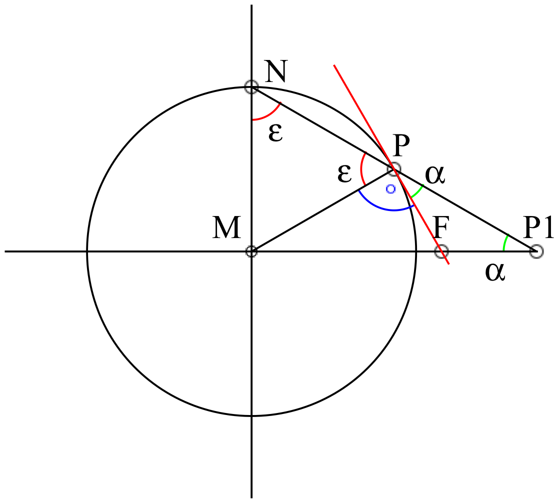

Abbildung 1.8: Achsenschnitt durch den Punkt P zur einfacheren Darstellung in 2D.

Die beiden Strecken $\bar{FP}$ und $\bar{FP}'$ sind also gleich lang. Beide stellen bzgl. der Dreiecke $\Delta AP'B$ und ΔAPB die entsprechenden Höhen dar. Da sich die Dreiecke $\Delta AP'B$ und ΔAPB zusätzlich die gemeinsame Grundlinie $\bar{AB}$ und den Lotfusspunkt **F** teilen, sind diese zueinander kongruent. Die Winkel $\angle$**APB** und $\angle$**AP'B** sind gleich groß. Damit erhält die streographische Projektion beim projizieren den Winkel und ist damit winkeltreu.