

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2019/20

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 22.1.2020 **vor der Vorlesung** in den Briefkästen (neben dem Zeichensaal U.39, Geb. E2 5) abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

Blatt 11

15. Januar 2020

Aufgabe 1 (Konkave Funktionen). Seien I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine konkave Funktion und $x_1, \dots, x_n \in I$.

(a) Zeigen Sie,

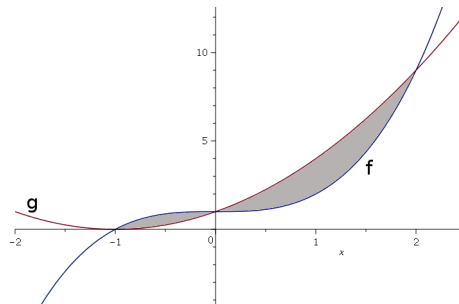
$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n} \leq f\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right).$$

(b) Folgern Sie die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel für $x_i > 0$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}.$$

(Hinweis: Wählen Sie $f = \ln$.)

Aufgabe 2 (Flächeninhalt). Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen definiert durch $f(x) = x^3 + 1$ und $g(x) = (x + 1)^2$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g , d.h. die graue Fläche in der Zeichnung.



Aufgabe 3 (Grenzwerte). (a) Zeigen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + e^x + e^{-x} - 4}{x^4} = \frac{1}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2} = \frac{b^2 - a^2}{4} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

Prüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

- (b) $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\cot x}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}$,
- (d) $\lim_{x \searrow 1} (\ln(x) \cdot \ln(1 - x))$.

Aufgabe 4 (Die Eulersche Zahl). Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln(1 + \frac{1}{n})) = 1$ und folgern Sie daraus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$