Fakultät MI, Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Michael Hoff

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2019/20

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 27.11.2019 **vor der Vorlesung** in den Briefkästen (neben dem Zeichensaal U.39, Geb. E2 5) abzugeben.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

Blatt 5 20. November 2019

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folgen:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \\ b_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \\ c_n &= \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für $1 \leq n < 1.000.000$ gilt $a_n > b_n > c_n$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$$

und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.

Aufgabe 2 (Die Landau–Symbole)**.** Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) $\frac{n^3+n+1}{2n^2-5} \in O(n)$.
(b) $\frac{n^3+n+1}{2n^2-5} \in o(n)$.
(c) $\frac{2n-5}{20n\sqrt{n}+1000} \in O\left(\frac{1}{n}\right)$.
(d) $\frac{20n\sqrt{n}+1000}{2n-5} \in O(n)$.

Aufgabe 3 (Konvergenz von Folgen)**.** Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $a_0 = 1$ und

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad \forall n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert. (Hinweis: Berechnen Sie zuerst den hypothetischen Grenzwert.)

Aufgabe 4. (a) Sei (a_n) die Fibonacci-Folge definiert durch $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ mit $a_1 = 1$ und $a_0 = 0$.

1. Zeigen Sie, dass $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ die obige Rekursion erfüllt.
2. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(b) Sei (a_n) die rekursive Folge definiert durch $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ mit $a_1 = 1$ und $a_0 = 0$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.