Fakultät MI, Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2019/20

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 04.12.2019 **vor der Vorlesung** in den Briefkästen (neben dem Zeichensaal U.39, Geb. E2 5) abzugeben.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

Blatt 6 27. November 2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$+ : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}],\ (a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}) \mapsto (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$

$$\cdot : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}],\ (a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}) \mapsto (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

ein Körper ist. (Hinweis: Zur Bestimmung des Inversen, denken Sie an die dritte binomische Formel sowie das Erweitern von Brüchen.)

Aufgabe 2 (Infimum und Supremum)**.** Seien

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{R} \text{ und } M_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\} \subset \mathbb{R}.$$

Welche dieser Mengen besitzt ein Supremum, welche ein Infimum? Geben Sie es jeweils an, wenn es existiert.

Aufgabe 3 (Abzählbarkeit)**.** Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
(b) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 4 (Grenzwerte von Reihen)**.** Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und geben Sie, falls er existiert, den Grenzwert an:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4}{n^2 - 3n + 1}$