Fakultät MI - Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot
Dr. Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaftler 1

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am **02.11.2017**, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Blatt 2 — 24.10.2017

Aufgabe 1. Gegeben seien die Mengen M_i, $i \in \{1,2,3,4\}$:

$$M_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad M_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 4\},$$
$$M_3 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad M_4 = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen

$$(a)\ M_1 \cap M_2, \quad (b)\ M_1 \cup M_2, \quad (c)\ M_3 \cap M_4,$$
$$(d)\ M_1 \backslash M_3, \quad (e)\ M_1 \cap (M_3 \backslash M_2), \quad (f)\ (M_4 \backslash M_3) \cap (M_1 \backslash M_2)$$

Aufgabe 2. Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4 \text{ oder } x(x-1) = 0\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+2)(x-3) = 0\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - x - 6 \leq 0\}$$

(a) Welche dieser Mengen sind gleich?
(b) Welche Inklusionen (d.h. Teilmengenbeziehungen) sind erfüllt?

Aufgabe 3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind. Bestimmen Sie im Falle einer bijektiven Funktion die zugehörige Umkehrfunktion und skizzieren Sie die Graphen beider Abbildungen in einem Koordinatensystem.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3.$
(b) $f_2 : (0, \infty) \to (0, \infty), x \mapsto 2x + 3.$
(c) $f_3 : \mathbb{R} \to [0, \infty), p \mapsto p^4.$
(d) $f_4 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+1}.$
(e) $f_5 : [0, \infty) \to (0, 1], t \mapsto \frac{1}{t^2+1}.$
(f) $f_6 : (-\infty, -\frac{1}{2}] \to [\frac{3}{4}, \infty), z \mapsto z^2 + z + 1.$

Aufgabe 4. Gegeben sei die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 + x_1^4$$

und

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2; \quad g(t) = (t, t\sqrt{1-t^2}).$$

(a) Berechnen Sie für $t \in [-1, 1]$ die Komposition $(f \circ g)(t) = f(g(t))$. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren (Diskussion in den Übungen)?

(b) Berechnen Sie den Gradienten

$$\mathrm{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

im Punkt $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

(c) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $v(t) := g'(t)$ im Punkt $t = \frac{1}{2}$.

(d) Für zwei Vektoren $w := (w_1, w_2)$ und $v := (v_1, v_2)$ definieren wir das Skalarprodukt zwischen w und v als

$$\langle w, v \rangle := w \cdot v := w_1 v_1 + w_2 v_2.$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen $w = (\mathrm{grad} f) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$ und $v = g' \left(\frac{1}{2} \right)$. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren (Diskussion in den Übungen)?