Fakultät MI - Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot
Dr. Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaftler 1

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am **21.11.2017**, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Blatt 5 14.11.2017

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

(i) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

(ii) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

(iii) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

(b) Benutzen Sie die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, um die folgende Relation für $\varphi \in \mathbb{R}$ zu beweisen:

$$\sin(3\varphi) = 3(\cos\varphi)^2\sin\varphi - (\sin\varphi)^3$$

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Wieso gilt diese Formel nicht für alle $x \in \mathbb{R}$?

(b) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die folgende Identität. Beachten Sie das positive Vorzeichen der Wurzel.

$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

(c) Bekanntlich gilt $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$ für alle $x \in [-1,1]$. Gilt auch $\arccos\big(\cos(x)\big) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Beweisen Sie Ihre Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie jeweils, für welche x die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\log_2(8) = x; \quad \log_2(x) = 8; \quad 2^x = 8; \quad x^2 = 8.$$

(b) Berechnen Sie für $a, b, x > 0$

$$\text{(i) } a^{\log_b(x)\log_a(b)} \quad \text{(ii) } \log_a(x)\log_x(a)$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für jede der folgenden rationalen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich $D_{\max}(f)$ und die Nullstellenmenge.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{(x-4)(x^2-2)}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{(x-2)^2(x+1)(x^2+1)}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 5x}{x^5 - 10x^3 - 9x}$.

Hinweis: Durch Ausprobieren können Sie Nullstellen vom Betrag ≤ 3 finden.