Fakultät MI - Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot
Dr. Michael Hoff

Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaftler 1

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am **12.12.2017**, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Blatt 8

05.12.2017

Aufgabe 1. Die Hyperbelfunktionen $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ sind durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definiert.

(a) Drücken Sie die erste und die zweite Ableitung von $\cosh(x)$ bzw. $\sinh(x)$ durch diese Funktionen aus.
(b) Untersuchen Sie $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ auf Symmetrie.
(c) Bestimmen Sie die Reihendarstellung von $\cosh(x)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}(x-1)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}} x^n$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

Aufgabe 3. (a) Gegeben seien Potenzreihen $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$, die jeweils Konvergenzradius $R > 0$ besitzen. Bestimmen Sie eine Formel für c_n so, dass $\sum_{n\geq 0} c_n(x-x_0)^n$ das Cauchy-Produkt dieser beiden Reihen ist.
(b) Schreiben Sie das Cauchy-Produkt der Potenzreihen $\sum_{n\geq 0} x^n$ und $\sum_{n\geq 0} nx^n$ als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (Die Konvergenzradien haben Sie in der Vorlesung bzw. in Aufgabe 2 bestimmt.)

Aufgabe 4. (a) Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl der Teilchen N nach dem Gesetz

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

ab. Bestimmen Sie die Zerfallsgeschwindigkeit:
(i) als Funktion der Zeit t,
(ii) als Funktion der Teilchenzahl $N(t)$ selbst.

(b) Berechnen Sie die zweite Ableitung nach x für $x \in (-1, 1)$ von

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$