C^*-Algebren II
(C^*-Algebras and K-theory)

§1 Gruppen-C^*-Algebren

Motivation: • Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Ist G abelsch, so kann zu G die duale Gruppe $\hat{G} := \{\varphi : G \to \mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$ stetiger Gruppenhom.$\}$ assoziiert werden, die wieder lokalkompakt ist. (pktw. Multipl. auf $\hat{G}$ und gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen macht $\hat{G}$ zu einer lokalkompakten Gruppe)

Die Pontrjagin-Dualität besagt, dass $\begin{array}{l} G \longrightarrow \hat{\hat{G}} \\ x \longmapsto ev_x \end{array}$ ein Isomorphismus von topol. Gruppen ist, mit anderen Worten: $G \longleftrightarrow \hat{G}$ sind dual, d.h. alle Information über G ist in $\hat{G}$ enthalten. Bsp.: $\underset{(\text{„Fouriertransf."})}{\mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{T} = \hat{\mathbb{Z}}}$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ [1]

• Was ist, wenn G nicht abelsch ist?
$\hat{G}$ enthält dann zu wenig Information, betrachte daher $\{G \to \mathcal{L}(H)$ unitäre Darstellungen$\}$ als Verallgemeinerung von $\hat{G}$.
Die Tannaka-Krein-Dualität besagt, dass eine kompakte (nicht notwendig abelsche) Gruppe aus ihren Darstellungen rekonstruiert werden kann. (Auch: Peter-Weyl) [1,2]

• Fazit: Um allgemein lokalkompakte Gruppen zu verstehen, ist es sinnvoll ihre Darstellungen zu studieren.

Literatur zur Motivation:

[1] Thomas Timmermann, An Invitation to Quantum Groups and Duality, EMS Textbooks in Mathematics, 2008.
(eher in Richtung Quantengruppen, aber siehe S. 3/4 und S. 104/105)

[2] A. Joyal, R. Street, An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups, in Category theory, Lect. Notes in Math. 1488, Springer, 1991
(auch eher Quantengruppen, aber siehe Introduction und §1)

(guter historischer Abriss des Zusammenhangs von C^*-Algebren mit Gruppen, siehe Anfang §1, Anfang §2)

[3] J. Rosenberg, C^*-Algebras and Mackey's theory of group representations, in C^*-Algebras: 1943-1993. A Fifty Year Celebration, Contemp. Math. 167, AMS 1994

Die Theorie der Operatoralgebren kann also beim Verständnis von Gruppen helfen. Hierzu gibt es verschiedene Ansätze:

- Betrachte $C_0(G)$ als „Koordinatenfunktionen" über G (z.B. $G \subseteq M_n(\mathbb{C})$ Matrixgruppe, wie $G = S_n = \{\text{Permutationen von } \{1,\dots,n\}\}$ oder $G = O_n$, $G = U_n$ also orthogonale bzw. unitäre Matrizen – dann ist $C_0(G)$ gegeben durch die Koordinatenfunktionen $f_{ij}: G \to \mathbb{C}$, $u \mapsto u_{ij}$.) $\rightsquigarrow$ führt zum Konzept der Quantengruppen
- Betrachte $C^*_{(max)}(G)$ und $C^*_{red}(G)$, die volle und die reduzierte Gruppen-C*-Algebra. Diese spiegeln die Gruppenstruktur und ihre Darstellung besser wider.
- Betrachte Von-Neumann-Algebren wie $L^\infty(G)$ oder $L(G)$. [1]

Wir betrachten hier $C^*(G)$ und $C^*_{red}(G)$.

- Die Gruppen-C*-Algebren $C^*(G)$ und $C^*_{red}(G)$ sind aus folgenden Gründen interessant:
  - Ihre Darstellungstheorie ist eng mit der der zugehörigen Gruppe verknüpft (s. obige Motivation).
  - Sie liefern gute Beispiele von C*-Algebren (auch im Zusammenhang mit verschränkten Produkten, die in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung von Gruppen-C*-Algebren darstellen) und bieten einen guten Übergang zu Von-Neumann-Algebren (hauptsächlich $C^*_{red}(G)$).
  - Historisch gesehen waren sie einer der Hauptbeweggründe, die Theorie der C*-Algebren überhaupt zu entwickeln, und sie sind immer noch ein sehr aktives Anwendungsgebiet. 1943 gab es zeitgleich den „allerersten" Artikel zu C*-Algebren von Gelfand Naimark, wie auch einen Artikel von Gelfand und Raikov über unitäre Darstellungen lokalkompakter Gruppen, was später (u.a. von Segal) noch deutlicher zusammengefügt wurde. [3]

1.1 <u>Def.</u>: Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Eine <u>unitäre Darstellung</u> von G ist ein Gruppenhomomorphismus
$\pi: G \to \mathcal{U}(H) := \{u \in \mathcal{L}(H) \text{ unitär}\}$, so dass
$\forall \xi \in H: \quad G \to H,\ g \mapsto \pi(g)\xi$ stetig ist.
π ist also stetig in der starken Operatortopologie.

1.2 <u>Bem.</u>: Auf $\mathcal{U}(H)$ stimmen die starke und die schwache Operatortopologie überein.
$[u_\lambda \xrightarrow{w} u \Rightarrow \|u_\lambda\xi - u\xi\|^2 = \underbrace{\|u_\lambda\xi\|^2}_{=\|\xi\|^2} - \underbrace{(u_\lambda\xi|u\xi) - (u\xi|u_\lambda\xi)}_{\to \|u\xi\|^2 = \|\xi\|^2} + \underbrace{\|u\xi\|^2}_{=\|\xi\|^2} \to 0$.

Das Haarmaß liefert uns eine gute Darstellung von G.

1.3 <u>Satz</u>: Sei G lok. komp. Es existiert ein linksinvariantes Radonmaß dt oder μ_G auf G, das eindeutig ist bis auf Vielfaches mit einer Konstante. Dh. $\forall s \in G\ \forall f \in L^1(G, dt)$ gilt
$$\int_G f(t)\,dt = \int_G f(st)\,dt \qquad \text{„das } \underline{\text{Haarmaß}}\text{"}$$

⌈<u>Beweisidee</u>: Konstruiere ein pos. Funktional $\Lambda: C_c(G) \to \mathbb{C}$ mit $\Lambda({}_sf) = \Lambda(f)\ \forall f\ ({}_sf(t) := f(st))$. $C_c(G) = \{f: G \to \mathbb{C} \text{ mit komp. Träger}\}$
⌊ Nach dem Satz von Riesz ex. dann ein Maß dt mit $\Lambda(f) = \int f(t)\,dt$

1.4 <u>Bem.</u>: Ist G diskret, so ist das (normalisierte, dh. $\mu_G(\{e\}) = 1$) Haarmaß das Zählmaß.
Ist G kompakt, so normalisieren wir $\mu_G(G) = 1$. ($\mathbb{R}^n$: Haar = Lebesgue)

1.5 <u>Prop.</u>: Der Raum $L^1(G) := L^1(G, dt)$ ist eine $*$-Banachalgebra per:
$$(f * g)(s) := \int_G f(t)g(t^{-1}s)\,dt \quad , f,g \in L^1(G),\ s \in G$$
„<u>Faltung</u>" oder „Konvolution"
$$f^*(s) := \Delta(s)^{-1}\,\overline{f(s^{-1})}$$
Hierbei ist $\Delta: G \to \mathbb{R}_+$ die <u>modulare Funktion</u>, so dass
$\mu_G(Es) = \Delta(s)\mu_G(E)$, wobei $Es = \{ts \mid t \in E\}$ (μ_G i.A. nicht rechtsinvariant).
Die Norm ist $\|f\|_1 = \int |f(t)|\,dt$.

Bew.: Mit Fubini sieht man

$$\int_G |f*g(s)|\,ds \le \int_G\int_G |f(t)|\,|g(t^{-1}s)|\,ds\,dt \overset{\text{da linksinv.}}{=} \int |f(t)| \left(\int |g(s)|\,ds\right) dt \le \|f\|_1 \|g\|_1$$

D.h. $f*g$ ist f.ü. definiert und in $L^1(G)$, $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$.
Die Faltung ist außerdem assoziativ.
Δ ist ein stetiger Gruppenhom., also $f^{**}(s) = \Delta(s)^{-1}\,\overline{f^*(s^{-1})} = \Delta(s^{-1})\Delta(s^{-1})^{-1} f(s) = f(s)$.

1.6 Bem.: (a) Ist G abelsch oder diskret oder kompakt, so ist $\Delta \equiv 1$.
G heißt dann unimodular.

(b) Ist G diskret, so ist μ_G das Zählmaß (nach Normalisierung) und für charakteristische Funktionen δ_t, $t\in G$ ist $\delta_{t_1} * \delta_{t_2}(s) = \sum_{g\in G} \delta_{t_1}(g)\,\delta_{t_2}(g^{-1}s) = \delta_{t_1t_2}(s)$
und dementsprechend $\sum_i \alpha_i\delta_{t_i} * \sum_j \beta_j \delta_{s_j} = \sum_{ij}\alpha_i\beta_j\,\delta_{t_is_j}$.
Die Faltung entspricht also exakt der Gruppenverknüpfung. Auch: $\delta_s^* = \delta_{s^{-1}}$.

(c) Es gilt $C_c(G) \subseteq L^1(G)$, da das Haarmaß endlich ist auf kompakten Mengen. $C_c(G)$ ist sogar dicht in $L^1(G)$.

(d) Für jede Gruppe G kann die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ betrachtet werden, die aus formalen endlichen Linearkombinationen $\sum_t \alpha_t t$ mit $\left(\sum_t\alpha_t t\right)\left(\sum_s \beta_s s\right) = \sum_{st}\alpha_t\beta_s\, st$ besteht.
Ist G diskret, so ist $\mathbb{C}G = C_c(G)$ mit $\sum \alpha_t t \leftrightarrow \sum\alpha_t\delta_t$.
$L^1(G)$ ist also die Vervollständigung von $\mathbb{C}G$ zu einer Banachalgebra.
Ist G endlich, so ist $\mathbb{C}G = L^1(G)$.

1.7 Prop.: Sei G lokalkompakt.
(a) G ist diskret $\Longleftrightarrow$ $L^1(G)$ ist unital $\Longleftrightarrow$ $\mu_G(\{e\})>0$
(b) G ist kommutativ $\Longleftrightarrow$ $L^1(G)$ kommutativ

Beweisskizze: (a) Ist G diskret, so ist $\{e\}$ offen, also $\mu_G(\{e\}) \ne 0$. (o.E. „$=1$")
Dann ist δ_e ein Einselement. Andere Richtungen fummeliger.
(b) Ist G diskret, so ist das nach Bem. 1.6(b) trivial.

$\left(f := -\delta_{t^{-1}} + \delta_e + \delta_t . \; \|f\|^2 = 9, \; \|f^* f\| \leq 5 \right)$

1.8 Bem.: $L^1(G)$ mit $\|\cdot\|_1$ ist keine C^*-Algebra. Es gibt aber zwei kanonische Wege um aus einer *-Banachalgebra (die eine approximierende Eins besitzt, was auf $L^1(G)$ für lokalkompakte Gruppen zutrifft) eine C^*-Algebra zu machen. [Dix, 2.7.1]

1.9 Def.: Sei G lok.komp.

Zu $f \in L^1(G)$ setze $\|f\| := \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi \text{ Darstellung von } L^1(G)\} \leq \|f\|_1$

Die (volle oder maximale) Gruppen-C^*-Algebra $C^*(G)$ (auch $C^*_{max}(G)$, $C^*_f(G)$) ist die Vervollständigung von $L^1(G)$ bzgl. dieser Norm.

1.10 Prop.: Sei G lok.komp.

(a) Jede unitäre Darstellung π von G induziert eine Darstellung von $L^1(G)$. (Es gilt sogar $\{\text{unitäre Darst. von } G\} \overset{\text{1:1}}{\longleftrightarrow} \{\text{nichtentartete Darst. von } L^1(G)\}$)

(b) Die Linksreguläre Darstellung $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$, gegeben durch $(\lambda(s)f)(t) := f(s^{-1}t)$ setzt sich zu einer treuen Darstellung von $L^1(G)$ fort.

(c) $\|\cdot\|$ aus 1.9 ist eine Norm.

Bew.: (a) Für $f \in L^1(G)$ setze $\tilde{\pi}(f) := \int_G f(t)\pi(t)\,dt$, d.h. $(\tilde{\pi}(f)\xi \mid \eta) := \int_G f(t)(\pi(t)\xi \mid \eta)\,dt$. Ist G diskret und $f = \sum \alpha_t \delta_t \in \mathbb{C}G \subseteq L^1(G)$, so ist $\tilde{\pi}(f) = \sum \alpha_t \pi(t)$.
Es gilt $\tilde{\pi}(f * g) = \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)$, $(\tilde{\pi}(f)^*\xi \mid \eta) = (\tilde{\pi}(f^*)\xi \mid \eta)$, $\|\tilde{\pi}(f)\| \leq \|f\|_1$.

(b) λ ist ein Gruppenhom. und $\lambda(s)$ ist unitär, für $s \in G$, da μ_G linksinvar. ist (also ist $\lambda(s)$ isometrisch).
Also ex. eine Fortsetzung $\tilde{\lambda} : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$.

(später 1.12(a)) ~~(Ist G diskret, so ist $\lambda(s)\delta_r(t) = \delta_r(s^{-1}t) = \delta_{sr}(t)$, d.h. $\lambda(s)\delta_r = \delta_{sr}$. λ ist also wieder einfach bloß eine Linksmultiplikation, s. GNS.)~~

Sei G diskret, $0 \neq f \in L^1(G)$. Also ex. $s \in G$ mit $f(s) \neq 0$. Dann $(\tilde{\lambda}(f)\delta_e \mid \delta_s) = \int_G f(t)(\underbrace{\lambda(t)\delta_e}_{\delta_t} \mid \delta_s)\,dt = f(s) \neq 0 \implies \tilde{\lambda}(f) \neq 0$.

(c) $f \neq 0 \implies \tilde{\lambda}(f) \neq 0 \implies \|f\| \neq 0$

1.11 Def: Die <u>reduzierte Gruppen-C^*-Algebra</u> $C^*_{red}(G)$ ist definiert als $C^*_{red}(G) := \overline{\tilde{\lambda}(L^1(G))} \subseteq \mathcal{L}(L^2(G))$.

1.12 Bem: (a) Ist G diskret, so ist $\lambda(s)\delta_r(t) = \delta_r(s^{-1}t) = \delta_{sr}(t)$, allgemeiner $\tilde{\lambda}(f)g = f * g$ für $f \in L^1(G)$, $g \in L^2(G)$.
$\left(\tilde{\lambda}(\sum_t \alpha_t \delta_t)(\sum_s \beta_s \delta_s) = \sum_{s,t} \alpha_t \beta_s \lambda(t)\delta_s = \sum_{s,t} \alpha_t \beta_s \delta_{ts} = (\sum_t \alpha_t \delta_t) * (\sum_s \beta_s \delta_s)\right)$
Die linksreguläre Darstellung ist also einfach nur die Linksmultiplikation, wie bei der GNS-Konstruktion.

(b) Die rechtsreguläre Darstellung $\varrho : G \to \mathcal{L}(L^2(G))$, gegeben durch $(\varrho(s)f)(t) := \Delta^{\frac{1}{2}}(s) f(ts)$ ist unitär äquivalent zur linksregulären Darstellung λ (für G lok.komp.).

(c) Es gibt eine bijektive Beziehung
$\{\text{unitäre Darst. von } G\} \underset{(1.10(c))}{\Longleftrightarrow} \{\text{nichtentartete Darst. von } L^1(G)\} \Longleftrightarrow \{\text{nichtentartete Darst. von } C^*(G)\}$
bzw. $\{\text{irred. unitäre Darst. von } G\} \Longleftrightarrow \{\text{irred. Darst. von } C^*(G)\}$

(d) Ist G diskret, so ist $C^*_{red}(G) = \overline{\mathbb{C}G}^{\|\cdot\|_{red}}$, $\|f\|_{red} = \|\tilde{\lambda}(f)\|$ und $C^*(G) = \overline{\mathbb{C}G}^{\|\cdot\|_{max}}$, $\|f\|_{max} = \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi : \mathbb{C}G \to \mathcal{L}(H) \text{ *-Darst.}\}$.
Das sind zwei kanonische Wege, um C^*-Normen zu erhalten.
$\|\cdot\|_{red}$ ist räumlich („spatial"), durch eine treue Darstellung, $\|\cdot\|_{max}$ ist maximal, durch das Supremum über alle Darstellungen.
Diese Konzepte werden uns im Kapitel über Mittelbarkeit und Exaktheit wiederbegegnen.

(e) Die linksreguläre Darstellung $\tilde{\lambda} : L^1(G) \to C^*_{red}(G)$ setzt sich zu einem *-Hom. $\lambda : C^*(G) \to C^*_{red}(G)$ fort, der jedoch i.A. kein Isomorphismus ist. (Notation: $\tilde{\lambda} = \lambda$)
Es gilt jedoch für lok.komp. Gruppen:
λ ist ein Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ G ist amenabel
Eine der vielen Definitionen für Amenabilität: G heißt <u>amenabel</u>, falls es einen Zustand $m : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $m(f_s) = m(f)$ für alle $f \in L^\infty(G)$, $s \in G$, wobei $f_s(t) := f(s^{-1}t)$.
G kompakt oder endlich oder abelsch $\Rightarrow$ G amenabel.

(f) Die Gruppen-von-Neumann-Algebra $L(G)$ ist definiert als $L(G) := C^*_{red}(G)'' \subseteq \mathcal{L}(L^2(G))$, also als einhüllende von-Neumann-Algebra von $C^*_{red}(G)$ bzw. als schwacher Abschluss von $\tilde{\lambda}(L^1(G)) \subseteq \mathcal{L}(L^2(G))$.

(g) Ist G lokalkomp. und abelsch, so ist $C^*(G) \cong \mathcal{C}_0(\hat{G})$.

Ist G diskret, so sind die Gruppen-C^*-Algebren oft anschaulicher. Insbesondere gibt es dann eine schöne Beschreibung von $C^*(G)$ als universelle C^*-Algebra.

1.13 <u>Def:</u> Sei G diskret. Die (volle) <u>Gruppen-C^*-Algebra</u> $C^*(G)$ ist die universelle C^*-Algebra, die von Unitären $u_g, g \in G$ erzeugt wird, mit den Relationen $u_g u_h = u_{gh}$ $\forall g,h \in G$ und $u_{g^{-1}} = u_g^*$.

1.14 <u>Bem:</u> (a) Die Unitären $(u_g)_{g\in G}$ zeichnen genau die Gruppen-Struktur von G nach. Außerdem gilt $u_e = 1$ für das neutrale Element e von G. ($u_e^2 = u_e = u_e^*$ und $u_g u_e = u_e u_g = u_g$ $\forall g \in G$)

(b) Die Definitionen 1.9 und 1.13 stimmen für diskrete Gruppen überein.

<u>Bew:</u> (b) Nach der universellen Eigenschaft ex. ein Hom. $\alpha : C^*(u_g, g \in G) \to A$, wobei $A := C^*(G)$ von Def. 1.9, mit $\alpha(u_g) = \delta_g$ (siehe 1.6(b): $\delta_g \delta_h = \delta_{gh}$, $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}}$, und 1.7(a)), der surjektiv ist, da $\mathbb{C}G \subseteq A$ dicht ist.

(Zu $x \in A$, $\varepsilon > 0$ ex. $y \in L^1(G)$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ nach Def. 1.9. Zu y ex. $z \in \mathbb{C}G = \mathcal{C}_c(G)$ mit $\|y - z\| \leq \|y - z\|_1 < \varepsilon$ nach 1.6(d), 1.6(c). Also $\|x - z\| < 2\varepsilon$.)

Ist nun $\pi : C^*(u_g, g \in G) \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$ eine treue Darstellung, so ist $\tilde{\pi} : G \to \mathcal{L}(H)$, $\tilde{\pi}(g) := \pi(u_g)$ eine unitäre Darstellung von G. Dies induziert eine Darstellung $\tilde{\sigma} : A \to \mathcal{L}(H)$ nach 1.10(a). Also kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} C^*(u_g, g \in G) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, hook, "\pi"'] & A \arrow[d, "\tilde{\sigma}"] \\ & \mathcal{L}(H) \end{tikzcd}$$

D.h. $\alpha(x) = 0 \Rightarrow \pi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

1.15 Bsp.: Es gilt $C^*(\mathbb{Z}) = C^*(u_n, n \in \mathbb{Z} \mid u_n \text{ unitär}, u_m u_n = u_{m+n}, u_{-n} = u_n^*)$

Also ist $u_0 = 1$ und $u_n = (u_1)^n$ für $n > 0$, $u_n = (u_1^*)^{|n|}$ für $n < 0$.
Somit ist $C^*(\mathbb{Z}) = C^*(u_1 \text{ unitär}) = \mathcal{C}(S^1)$. ($C^*$-Alg. Bsp. 7.3)
Da $\mathbb{Z}$ abelsch ist, ist $\mathbb{Z}$ amenabel, also $C^*(\mathbb{Z}) = C^*_{red}(\mathbb{Z})$.

1.16 Bsp.: Die freie Gruppe $\mathbb{F}_2$ mit zwei Erzeugern x und y ist nicht amenabel, also $C^*(\mathbb{F}_2) \neq C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$.
Wir haben $C^*(\mathbb{F}_2) = C^*(u, v \text{ unitär})$. Hierbei haben u und v keinerlei Relationen untereinander. Als Gruppe kann man $\mathbb{F}_2$ als freies Produkt von $\mathbb{Z}$ mit sich selbst schreiben. Hierbei ist $G_1 * G_2$ definiert als die Gruppe, die aus Elementen von G_1 und Elementen von G_2 besteht, ohne weitere Relationen, also aus Wörtern $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots a_k b_k$, $a_i \in G_1$, $b_i \in G_2$.
Sind G_1, G_2 diskret, so kann man sehen: $C^*(G_1 * G_2) = C^*(G_1) *_{\mathbb{C}} C^*(G_1)$
(Erinnerung: $A *_{\mathbb{C}} B$, das unitale freie Produkt nach C^*-Alg. Def. 7.17)
Dann $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und also
$$C^*(\mathbb{F}_2) = C^*(\mathbb{Z}) *_{\mathbb{C}} C^*(\mathbb{Z}) = \mathcal{C}(S^1) *_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(S^1).$$

Die Gruppen-C^*-Algebren (wie auch die zugehörigen Von-Neumann-Algebren) sind Gegenstand vieler Untersuchungen und ein sehr wichtiges Beispiel.
Einige Eigenschaften:

- $C^*(\mathbb{F}_2)$ und $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ haben treue Spuren.
- $C^*(\mathbb{F}_2)$ und $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ sind projektionslos. (Letzteres war bis 1982 ein heißes Problem)
- $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ ist einfach.

(Zur Erinnerung: Kaplansky fragte 1958 nach einem Beispiel einer einfachen, unitalen, projektionslosen C^*-Algebra. Diese Frage wurde erst 1981 mit einem Beispiel von Blackadar und 1982 mit dem natürlicheren Bsp. $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ beantwortet. Dass $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ einfach ist, zeigte Powers 1975, die Projektionslosigkeit konnte erst 1982 von Pimsner und Voiculescu mit Hilfe von K-Theorie (die gerade im Entstehen war) gezeigt werden.)
(s. auch die Vorbemerkung von C^*-Alg., Prop. 8.14)