§2 verschränkte Produkte

Motivation: • Gruppen sind sehr grundlegende mathematische Objekte, sie sind die „Symmetrien des Systems". Da die Automorphismen einer C^*-Algebra eine Gruppe bilden (per Komposition), können wir Gruppen auf C^*-Algebren wirken lassen. Das liefert u.a. viele neue Beispiele und ist auch in der Theorie von Von-Neumann-Algebren wichtig.

- Sei G diskret und A eine unitale C^*-Algebra, betrachte eine Wirkung $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$ (Gruppenhom.). Ziel ist es, eine C^*-Algebra $A \rtimes_\alpha G$ zu definieren, die sowohl A als auch G „enthält", so dass die Automorphismen α_g, $g \in G$ „inner" werden, also durch Unitäre implementiert werden. M.a.W.: Adjungiere Unitäre u_g, $g \in G$ zu A, so dass $\alpha_g(x) = u_g x u_g^*$ $\forall x \in A$ $\forall g \in G$ gilt.
- Wichtige Urbeispiele: a) Sei X ein lokalkomp. Raum, G lok.komp. Gruppe, $\mathring{\alpha}: X \times G \to X$ eine stetige Wirkung von X auf G. Dies liefert eine Wirkung $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(C_0(X))$ und somit eine „Transformations-Gruppen-C^*-Algebra" $C_0(X) \rtimes_\alpha G$, die die Informationen über das System $(X, G, \mathring{\alpha})$ enthält.

  b) Ist $A = \mathbb{C}$, so liefert die Konstruktion $\mathbb{C} \rtimes_\alpha G$ (mit der trivialen Wirkung von G) die Gruppen-C^*-Algebra $C^*(G)$.

  In diesem Sinne können verschränkte Produkte als Verallgemeinerung der Konstruktionen des vorherigen Kapitels gesehen werden (was jedoch etwas zu kurz gegriffen würde).

Zur historischen Entwicklung s. z.B.:

- J. Packer, Transformation group C^*-algebras: A selective survey, in C^*-Algebras: 1943-1993. A Fifty Year Celebration, Contemp. Math. 167, AMS 1994
- B. Blackadar, Operator algebras, 2006, Kapitel II.10

2.1 Def.: Sei G eine lok. komp. Gruppe, A eine C^*-Algebra und $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$, $g \mapsto \alpha_g$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus (stetig im Sinne $g \mapsto \alpha_g(x)$ stetig $\forall x \in A$). α heißt Wirkung von G auf A, A heißt G-C^*-Algebra und das Tripel (A, G, α) heißt kovariantes System oder C^*-dynamisches System.

2.2 Def.: Eine kovariante Darstellung eines C^*-dynamischen Systems (A, G, α) ist eine nichtentartete Darstellung $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ zusammen mit einer unitären Darstellung $G \to \mathcal{U}(H)$, $g \mapsto u_g$ (auf demselben HR), so dass

$$\pi(\alpha_g(x)) = u_g \pi(x) u_g^* \quad \forall x \in A \ \forall g \in G .$$

Die Automorphismen α_g werden also durch $(u_g)_{g \in G}$ implementiert.

2.3 Prop.: Auf $\mathcal{C}_c(G, A) := \{ f : G \to A \text{ stetig mit kompaktem Träger} \}$ definiere

$$(f * g)(s) := \int_G f(t)\, \alpha_t(g(t^{-1}s))\, dt \qquad f, g \in \mathcal{C}_c(G, A)$$

$$f^*(s) := \Delta(s^{-1})\, \alpha_s(f(s^{-1})^*) \qquad s \in G$$

Mit $\|f\|_1 := \int_G \|f(t)\| dt$ ist $\mathcal{C}_c(G, A)$ dann eine normierte $*$-Algebra, $L^1(G, A)$ dessen Vervollständigung.

[Bew.: Vgl. Prop. 1.5

2.4 Bem.: Ist G diskret, so ist $\mathcal{C}_c(G, A) = AG = \{ \sum_{t \in G}^{\text{fin}} a_t \delta_t \mid a_t \in A \}$, also formale endliche Linearkombinationen mit Koeffizienten in A.
Dann ist das Produkt auf AG via α „getwistet" (sei A unital):

$$(\delta_{t_1} * a\delta_{t_2})(s) = \sum_{t \in G} \delta_{t_1}(t)\, \alpha_t(a\delta_{t_2}(t^{-1}s)) = \alpha_{t_1}(a)\, \delta_{t_1 t_2}(s) \quad \text{(vgl. Bem. 1.6(b))}$$

für die Involution gilt: $\quad \delta_t^*(s) = \delta_{t^{-1}}(s)$

Bzw.: $\left(\sum_t a_t \delta_t\right) * \left(\sum_s b_s \delta_s\right) = \sum_{s,t} a_t\, \alpha_t(b_s)\, \delta_{ts} =$

von der Idee α_t „inner zu machen": $\left(\sum_t a_t \delta_t\right)\left(\sum_s b_s \delta_s\right) = \sum a_t \underbrace{\delta_t b_s \delta_t^*}_{\alpha_t(b_s)} \underbrace{\delta_t \delta_s}_{\delta_{ts}}$

bzw. $(\underbrace{\delta_t}_{f} \underbrace{b \delta_t^*}_{g})(s) = \sum_{y \in G} \delta_t(y)\, \alpha_y(b \delta_{t^{-1}}(y^{-1}s)) = \alpha_t(b)\, \delta_e(s)$

Dies können wir wieder auf zwei Arten zu einer C^*-Algebra vervollständigen.

2.5 <u>Def</u>: Sei G lokalkompakt, $f \in L^1(G,A)$. Setze

$$\|f\| := \sup\{ \|\sigma(f)\| \mid \sigma : L^1(G,A) \to \mathcal{L}(H) \text{ nicht-entartete }{}^*\text{-Darstellung, die von einer kovarianten Darstellung von } (A,G,\alpha) \text{ induziert wird} \} \leq \|f\|_1$$

(s. 1.10(a). Hier ist $\langle \sigma(f)\xi | \eta \rangle := \int_G \langle \pi(f(t)) u_t \xi | \eta \rangle \, dt$)

Die Vervollständigung von $L^1(G,A)$ bzgl. dieser Norm ist die C^*-Algebra $A \rtimes_\alpha G$ (oder $C^*(A,G,\alpha)$ bzw. $G \ltimes_\alpha A$, $A \times_\alpha G$), das (volle) <u>verschränkte Produkt</u> von A mit G.

2.6 <u>Bem</u>: Wie im Fall der Gruppen-C^*-Algebren kann man eine linksreguläre Darstellung für C^*-dynamische Systeme definieren, die erstens eine Definition von reduzierten verschränkten Produkten $A \rtimes_\alpha^{red} G$ ergeben und zweitens den Nachweis liefern, dass die Norm in 2.5 wirklich eine Norm ist (vgl. Prop 1.10(b) und (c)).
Ist G amenabel, so ist $A \rtimes_\alpha G \cong A \rtimes_\alpha^{red} G$.

2.7 <u>Bspe</u>: (a) Sei X ein lokalkomp. Raum, G lokalkompakte Gruppe, $\mathring{\alpha} : X \times G \to X$, $(x,g) \mapsto xg$ eine stetige Wirkung von X auf G. Dann ist $(C_0(X), G, \alpha)$ ein C^*-dynamisches System mit $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(C_0(X))$,

$$\alpha_g(f)(x) := f(\mathring{\alpha}(x,g)) = f(xg) \quad , x \in X, g \in G.$$

(b) Ist $A = \mathbb{C}$, so ist $L^1(G,A) = L^1(G)$ aus Prop 1.5 und $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ ist trivial, per $\alpha_g(\lambda) = \lambda$.

Also ist $\mathbb{C} \rtimes_\alpha G = C^*(G)$, $\mathbb{C} \rtimes_\alpha^{red} G = C^*_{red}(G)$.

Allgemeiner: Wirkt G trivial auf einer beliebigen C^*-Algebra A (also $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$, $\alpha_g \equiv id$), so ist

$$A \rtimes_\alpha G \cong A \otimes_{max} C^*(G) \quad , \quad A \rtimes_\alpha^{red} G \cong A \otimes_{min} C^*_{red}(G)$$

(Zu $\otimes_{max}$ und $\otimes_{min}$ eventuell am Ende des Semesters)

(c) Ist α eine Wirkung einer lok.komp. Gruppe H auf einer lok.komp. Gruppe N, so wirkt H auch auf $C^*(N)$ und

$$C^*(N \rtimes_\alpha H) \cong C^*(N) \rtimes_\alpha H \quad , \quad C^*_{red}(N \rtimes_\alpha H) \cong C^*_{red}(N) \rtimes_\alpha^{red} H .$$

Ist G diskret und A unital, so sind die verschränkten Produkte noch schöner. Genau dann ist $A \rtimes_\alpha G$ nämlich unital. Und besser noch: Es hat eine schöne Beschreibung als universelle C^*-Algebra.

2.8 <u>Def.</u>: Sei G diskret, A unital und $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$ eine Wirkung von G auf A (also (A, G, α) C^*-dyn. System). Dann ist

$$A \rtimes_\alpha G := C^*\big(a \in A,\ u_g, g \in G \ \big|\ u_g u_h = u_{gh},\ u_g^* = u_{g^{-1}},\ \alpha_g(a) = u_g a u_g^* \ \forall g, h \in G \ \forall a \in A\big)$$

(außerdem $1_A = u_e$) $\longrightarrow$

2.9 <u>Bem.</u>: (a) $A \rtimes_\alpha G$ adjungiert also Unitäre u_g $(u_g u_g^* = u_g u_{g^{-1}} = u_e = 1)$, die wie in Def. 1.13 die Struktur von G simulieren und die Automorphismen $(\alpha_g)_{g \in G}$ implementieren. In $A \rtimes_\alpha G$ sind diese also „<u>innere</u>".

(b) Die Definitionen 2.5 und 2.8 stimmen für diskrete Gruppen G und unitale C^*-Algebren A überein, da wie in Bem. 1.4(b) ein Hom. $C^*(a \in A, u_g, \ldots) \longrightarrow C_c(G, A)$ ex. (s. Bem. 2.4)

$$u_g \longmapsto \delta_g$$
$$a \longmapsto a \cdot \delta_e$$

der ein Isomorphismus ist.

(c) Auf dem Level von universellen C^*-Algebren ist $\mathbb{C} \rtimes_\alpha G = C^*(G)$ noch direkter (mit Def. 2.8 und 1.13).

2.10 Bem.: Ist $G = \mathbb{Z}$, so besteht die Wirkung von G auf A nur aus dem Automorphismus α_1 (da $\alpha_n = \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_1$).
Umgekehrt induziert jeder Automorphismus $\alpha : A \xrightarrow{\cong} A$ eine Wirkung $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(A)$ per $\alpha_n := \begin{cases} \underbrace{\alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{n\text{-mal}} & n > 0 \\ \underbrace{\alpha^{-1} \circ \ldots \circ \alpha^{-1}}_{|n|\text{-mal}} & n < 0 \end{cases}$

(Wir bezeichnen diese Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathrm{Aut}(A)$ wieder mit α.)
D.h. jeder Automorphismus $\alpha : A \xrightarrow{\cong} A$ liefert
$$A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = C^*(a \in A,\ u \text{ unitär} \mid \alpha(a) = uau^*).$$
Andere wichtige Spezialfälle sind übrigens $G = \mathbb{Z}_2$ und $G = \mathbb{R}$.

2.11 Bsp.: Betrachte den Automorphismus $\alpha_\vartheta : \mathcal{C}(S^1) \to \mathcal{C}(S^1)$, $v \mapsto e^{2\pi i \vartheta} v$ für $\vartheta \in \mathbb{R}$. (Erinnerung: $\mathcal{C}(S^1) = C^*(v \text{ unitär})$)
Dann ist
$$\mathcal{C}(S^1) \rtimes_{\alpha_\vartheta} \mathbb{Z} = C^*(u, v \text{ unitär} \mid uvu^* = e^{2\pi i \vartheta} v)$$
$$= A_\vartheta \quad \text{(Rotationsalgebra)}$$
Wir schreiben oft auch einfach $\mathcal{C}(S^1) \rtimes_\vartheta \mathbb{Z} = A_\vartheta$.

Bew.: $\mathcal{C}(S^1) \rtimes_\vartheta \mathbb{Z} = C^*(x \in \mathcal{C}(S^1),\ u \text{ unitär} \mid \alpha_\vartheta(x) = uxu^* \ \forall x)$
$$\overset{\text{Da } \mathcal{C}(S^1) = C^*(v \text{ unitär})}{=} C^*(v \text{ unitär}, u \text{ unitär} \mid \underbrace{\alpha_\vartheta(v)}_{= e^{2\pi i \vartheta} v} = uvu^*)$$
$$= C^*(u, v \text{ unitär} \mid uv = e^{2\pi i \vartheta} vu)$$
$$= A_\vartheta$$

Lit §1 u. 2:
- B. Blackadar, Operator algebras, Kapitel II.10
- N. Brown, N. Ozawa, C^*-algebras and finite-dim. approx., Ch. 4.1 und Ch. 2.5
- K. Davidson, C^*-algebras by example, Ch. VIII und Ch. VII

nur für diskrete Gruppen ($C^*(G)$, $A \rtimes G$)
nur für diskrete Gruppen ($A \rtimes G$)