§3 Einführung in die K-Theorie

__Motivation:__ • „K-Theorie hat das Studium von Operatoralgebren revolutioniert" (Blackadar, K-Th. for Op. Alg., Vorwort)

• Die K-Theorie wurde von Atiyah und Hirzebruch (1960er) entwickelt und in den 1970ern in die Theorie der C^*-Algebren eingeführt. Parallel wurde die K-Homologie bzw. die Ext-Theorie entwickelt (Brown, Douglas, Fillmore). Kasparov hat beides dann in der KK-Theorie zusammengefügt (1980er). Es gibt noch andere Varianten, wie die E-Theorie von Connes und Higson (90er), bivariante K-Theorie, equivariante K-Theorie (die Gruppenwirkungen einbezieht), etc.

• Idee: Funktoren $K_i : \{C^*\text{-Algebren}\} \to \{\text{abelsche Gruppen}\}$ für $i = 0, 1$, mit so schönen Eigenschaften, dass die Definitionen von K_0 und K_1 „fast egal" ist – für viele Zwecke reichen die Rechenregeln von K_0 und K_1 zusammen mit einer Normierung auf ein paar Basisfälle.

• Anwendungen: • AF-Algebren oder Kreiselbergalgebren sind komplett durch ihre K-Theorie (plus ein bisschen naheliegende Struktur) bestimmt. (Elliott 70er, Kirchberg 90er, Phillips 2000)
• Pimsner und Voiculescu zeigten 1982 mit Hilfe der K-Theorie, dass $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ projektionslos ist. Dies bestätigte eine sehr alte Vermutung von Kadison, dass $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ ein (erstes) Beispiel einer projektionslosen, einfachen C^*-Algebra ist.
(aus dem Vorwort von Rørdam, Larsen, Laustsen)

• Die topologische K-Theorie (von Atiyah und Hirzebruch) ist das „Studium von Vektorbündeln mit algebraischen Methoden", eine Theorie der projektiven Moduln. (Blackadar, Op. Algebren, Kap V)
Insofern spielen Projektionen auch für die K-Theorie von C^*-Algebren auch eine sehr wichtige Rolle (K_0). Die zweite wichtige Klasse von Elementen sind Unitäre (K_1), als (innere) Automorphismen bzw. invertierbare Elemente. (Zur topol. K-Th. siehe Blackadar, K-Theory for Op. Algebras, §1)

Da Unitäre und Projektionen eine so wichtige Rolle spielen in der K-Theorie von C^*-Algebren, werden wir diese zunächst ein wenig studieren, besonders deren Verhalten untereinander, hinsichtlich „Äquivalenzen“ – die K-Gruppen werden aus bestimmten Äquivalenzklassen bestehen.

3.1 Def: Sei G eine topologische Gruppe. $g_1, g_2 \in G$ heißen homotop, falls es einen Pfad $\gamma: [a,b] \to G$ gibt, der stetig ist und $\gamma(a) = g_1$, $\gamma(b) = g_2$ erfüllt. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf G, schreibe $g_1 \sim g_2$ oder $g_1 \sim_G g_2$ oder $g_1 \underset{\gamma}{\sim} g_2$.
Wir setzen $G_0 := \{g \in G \mid g \sim e\}$, die wegweise Zusammenhangskomponente des neutralen Elements $e \in G$.

3.2 Bem: $G_0 \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

⌜Bew: $g \underset{\gamma}{\sim} e$. Dann $g^{-1} \underset{\gamma^{-1}}{\sim} e$ per $\gamma^{-1}(t) := \gamma(t)^{-1}$, also $g^{-1} \in G_0$
(Da G eine topologische Gruppe ist, ist die Inversion stetig.)
⌞Für $g_1 \underset{\gamma_1}{\sim} e$, $g_2 \underset{\gamma_2}{\sim} e$ ist $g_1 g_2 \underset{\gamma_1\gamma_2}{\sim} e$.

3.3 Def: Sei A eine unitale C^*-Algebra. Setze $\mathcal{U}(A) := \{u \in A \text{ unitär}\}$. Dies ist eine topologische Gruppe mit der Normtopologie (siehe Prop. 2.4 von C^*-Alg. I).
Setze $\mathcal{U}_0(A) := \{u \in \mathcal{U}(A) \mid u \sim 1\}$. (Beachte: Homotopiepfade müssen aus Unitären bestehen!)

3.4 Lemma: Sei A eine unitale C^*-Algebra, $u \in \mathcal{U}(A)$.

(a) $\|1 - u\| < 2 \implies \exists\, h = h^* \in A$ mit $u = e^{ih}$

(b) $\mathcal{U}_0(A) = \{e^{ih_1} \cdot \ldots \cdot e^{ih_n} \mid h_1, \ldots, h_n \in A \text{ selbstadjungiert}, n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\sigma: A \twoheadrightarrow B$ surj. $*$-Hom., B ebenfalls unitale C^*-Algebra, σ unital. Dann ist $\sigma|_{\mathcal{U}_0(A)}: \mathcal{U}_0(A) \to \mathcal{U}_0(B)$ surjektiv.
(bzw. $\sigma(\mathcal{U}_0(A)) = \mathcal{U}_0(B)$)

Bew: (a) $-1 \notin \operatorname{Sp} u \subseteq S^1$. Somit ist $e^{i\cdot}: [0,2\pi)\setminus\{\pi\} \to S^1\setminus\{-1\}$ invertierbar mit stetiger Umkehrfunktion arg. Nach dem Funktionalkalkül ist somit $h := \arg(u)$ wohldefiniert und reell und $e^{ih} = e^{i\arg(u)} = u$. (Blatt 2, A2 von C*-Alg. I)

(b) „$\supseteq$": Mit $\gamma(t) = e^{ith_1}\cdots e^{ith_n}$, $t\in[0,1]$ ist $e^{ih_1}\cdots e^{ih_n} \sim 1$

„$\subseteq$" Für $u \sim_\gamma 1$ wähle Partition $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ mit $\|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)\|<2$. Dann gilt

$$u = \gamma(1) = \underbrace{\gamma(t_n)\gamma(t_{n-1})^{-1}}_{=e^{ih_n}} \underbrace{\gamma(t_{n-1})\gamma(t_{n-2})^{-1}}_{=e^{ih_{n-1}}} \cdots \underbrace{\gamma(t_1)\gamma(t_0)^{-1}}_{=e^{ih_1}} \underbrace{\gamma(t_0)}_{=1}$$

Denn $\|\gamma(t_i)\gamma(t_{i-1})^{-1} - 1\| = \|(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))\gamma(t_{i-1})^{-1}\| \underset{\uparrow}{<} 2$.
($\|w\|=1$ $\forall w$ unitär)

(c) $\sigma(U_0(A)) \subseteq U_0(B)$: $\sigma(e^{ih}) = e^{i\sigma(h)}$

„$\supseteq$": Sei $w = e^{ih_1}\cdots e^{ih_n} \in U_0(B)$. Dann existieren $h_i' \in A$ mit $\sigma(h_i') = h_i$. Setze $g_i := \operatorname{Re} h_i' = \frac{h_i'+h_i'^*}{2}$. Also $g_i = g_i^*$, $\sigma(g_i) = h_i$, $\sigma(e^{ig_1}\cdots e^{ig_n}) = w$.

⌞

3.5 Prop.: (a) $U_0(M_n(\mathbb{C})) = U(M_n(\mathbb{C}))$.

(b) Ist A unital, so ist $U_0(A)$ eine normale Untergruppe von $U(A)$.

(d) $U_0(A)$ ist offen und abgeschlossen in $U(A)$

Bew: (a) Für $a\in M_n(\mathbb{C})$ (normal) ist $\operatorname{Sp} a = \{\text{Eigenwerte von } a\}$ endlich. Also ist für $u\in M_n(\mathbb{C})$ unitär ein Zweig des Logarithmus stetig.

(b) $u\in U_0(A)$, $v\in U(A)$, dann $u\sim_\gamma 1$ und somit $vuv^{-1} \sim_{v\gamma v^{-1}} 1$.

(d) $U_0(A)$ offen: $u\in U_0(A)$, $u'\in U(A)$ mit $\|u-u'\|<2$. Dann $\|1-u^{-1}u'\|<2$, also $u^{-1}u'\in U_0(A) \Rightarrow u'\in U_0(A)$. Bew.: $u'\sim u\sim 1$.

$U_0(A)$ abgeschl.: $U_0(A)\ni u_n \to u\in U(A)$, dann $\|u_n-u\|<2$ für n groß genug, also $u_n^{-1}u \in U_0(A) \Rightarrow u\in U_0(A)$

⌞

(c) $u,v\in U(A)$, $\|u-v\|<2 \Rightarrow u\sim_h v$

[$\|1-u^*v\|<2 \overset{3.4}{\Longrightarrow} u^*v \sim 1$, d.h. $\underbrace{u(u^*v)}_{=v} \sim u$

3.6 Lemma: A unital, $u,v\in A$ unitär. Dann

$$\begin{pmatrix}u&\\&v\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}uv&\\&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}vu&\\&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}v&\\&u\end{pmatrix}\text{ in } U(M_2(A))\text{, insbes. }\begin{pmatrix}u&\\&u^*\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$$

⌈Bew: $\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$ per $w(t)=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

Also $\begin{pmatrix}u&\\&v\end{pmatrix}\underset{\uparrow}{\sim}\begin{pmatrix}-u&\\&-v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}uv&\\&1\end{pmatrix}$

(per $e^{it}\begin{pmatrix}u&\\&v\end{pmatrix}$, $t\in[0,\pi]$)

⌊ Ebenso $\begin{pmatrix}u&\\&v\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-u&\\&-v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v&\\&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}v&\\&u\end{pmatrix}$.

3.7 Bemerkung: A unital. Ist $z\in A$ invertierbar, so auch $|z|:=(z^*z)^{\frac{1}{2}}$ und $w(z):=z|z|^{-1}$ ist unitär ($w(z)^*w(z)=w(z)w(z)^*=1$). Außerdem $z=w(z)|z|$. Es gibt also eine Beziehung zwischen invertierbaren Elementen und Unitären.
Für $w: GL(A)\to U(A)$ gilt $w(u)=u$ $\forall u\in U(A)$, w ist stetig und $w(z)\sim_h z$ $\forall z\in GL(A)$.

Nun zu den Projektionen. Hier definieren wir zwei Äquivalenzarten, die „fast äquivalent" sind. (

3.8 Def: $p,q\in A$ Projektionen. (D.h. $p=p^2=p^*$)

$p\sim q$ Murray-von Neumann-äquivalent $:\Leftrightarrow$ $\exists v\in A: v^*v=p, vv^*=q$

$p\sim_h q$ homotop $:\Leftrightarrow$ $\exists\gamma:[0,1]\to\{\text{Proj. in } A\}$ stetig, $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$

3.9 Bem: (a) $v\in A$ mit $v^*v=p$, $vv^*=q$ ist eine partielle Isometrie, d.h. $v=vv^*v$ bzw. für $v\in\mathcal{L}(H)$ ist $v: pH\to qH$ isometrisch (siehe Blatt 1b, C^*-Algebren I).

(b) „$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation. $p=v^*v\sim vv^*=q=w^*w\sim ww^*=r$
$\Rightarrow p\sim r$ per $z:=wv$ ($z^*z=v^*(w^*w)v=p$, $zz^*=w(vv^*)w^*=r$)

(c) Sind $e,f,e',f' \in A$ Projektionen mit $e \perp f$, $e' \perp f'$ (d.h. $ef=0$) und $e \sim e'$, $f \sim f'$, so ist auch $e+f \sim e'+f'$.

⌈Sei $v^*v = e$, $vv^* = e'$, $w^*w = f$, $ww^* = f'$. Dann ist

$w^*v = w^*\underbrace{ww^*}\underbrace{vv^*}v = w^*f'e'v = 0$. Also

$(v+w)^*(v+w) = v^*v + w^*w = e+f$, $(v+w)(v+w)^* = e'+f'$ ⌋

15.5.2012

3.10 Lemma: Sei A unitale C^*-Algebra, $e,f \in A$ Projektionen.

(a) $\|e-f\| < 1 \Rightarrow \exists u \in U_0(A)$ mit $ueu^* = f$ (insbes. $e \sim f$)

(b) $e \sim_h f \Leftrightarrow \exists u \in U_0(A)$ mit $ueu^* = f$

(insbes. $e \sim_h f \Rightarrow e \sim f$)

⌈Bew: (a) $x := 2e-1$, $y := 2f-1$ selbstadjungiert, unitär, $x^2 = y^2 = 1$, also x und y Symmetrien (Idee: e: $0 \ 1$, x: $-1 \ 1$)

$\|1 - xy\| = \|x(x-y)\| \le \|2(e-f)\| < 2$

$\overset{3.4(a)}{\Longrightarrow} \exists h = h^* \in A$ mit $xy = e^{ih}$ und $yx = (xy)^* = e^{-ih}$

Da x unitär ist, ist $a \overset{\alpha}{\mapsto} xax = xax^*$ ein Isomorphismus von A, also gilt mit $f(xy) = \frac{1}{i}\log(xy) = h$, $f((xy)^*) = -h$

Folgendes: $xhx = \alpha(f(xy)) = f(\alpha(xy)) = f(x^2yx)$

$= f((xy)^*) = -h$

Setze $u := e^{-i\frac{h}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ 3.4(b)}}{\in} U_0(A)$ (also „$u = \sqrt{yx}$")

Dann $uxu^* = x\underbrace{xe^{-i\frac{h}{2}}x}e^{i\frac{h}{2}} = xe^{i\frac{h}{2}}e^{i\frac{h}{2}} = xxy = y$

(wieso: $g(h) = e^{-i\frac{h}{2}}$, dann $\alpha g(h) = g\alpha(h) = g(-h) = e^{i\frac{h}{2}}$)

und $ueu^* = \frac{uxu^*+1}{2} = \frac{y+1}{2} = f$.

(b) „⇒" $t\mapsto p_t$, $t\in[0,1]$ stetige Familie von Projektionen in A mit $p_0=e$, $p_1=f$. Wähle eine Unterteilung $0=t_0<t_1<\dots<t_m=1$ mit $\|p_{t_i}-p_{t_{i-1}}\|<1 \overset{(a)}{\Rightarrow} \exists\, u_i\in U_0(A)$ mit $u_ip_{t_{i-1}}u_i^*=p_{t_i}$

Dann ist $u:=u_m\cdots u_1\in U_0(A)$ und

$$ueu^*=u_m\cdots\underbrace{u_1p_0u_1^*}_{p_{t_1}}\cdots u_m^*=p_{t_m}=f.$$

„⇐" Sei $u\sim 1$ per u_t, $t\in[0,1]$, $u_0=1$, $u_1=u$.

Dann $t\mapsto u_teu_t^*$ Homotopie von Projektionen mit $e\sim f$

└

3.11 <u>Korollar:</u> A C^*-Algebra, $e,f\in A$ Projektionen.

Dann ist $A\cong\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}\subseteq M_2(A)$ C^*-Unteralgebra und

$$e\sim_h f \text{ in } M_2(A) \iff e\sim f \text{ in } A$$

(d.h. $\begin{pmatrix}e&\\&0\end{pmatrix}\sim_h\begin{pmatrix}f&\\&0\end{pmatrix}$)

Also bis auf Übergang zu Matrizen: „$\sim\;=\;\sim_h$"

┌Bew: „⇒" Nach 3.10b ex. $u\in U_0(M_2\tilde A)$ mit $ueu^*=f$ (lese $M_nA\subseteq M_n\tilde A$)

Mit $v:=ue\in A\subseteq M_2\tilde A$ mit $v^*v=e$, $vv^*=ueu^*=f$.

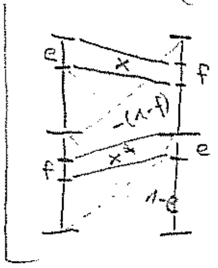
(Beachte: $v=(ueu^*)ue=fue=\begin{pmatrix}*&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*&*\\ *&*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&0\\0&0\end{pmatrix}\in A$)

„⇐" Sei $x\in A$ mit $x^*x=e$, $xx^*=f$. Dann ist $u:=\begin{pmatrix}x&-(1-f)\\1-e&x^*\end{pmatrix}$

unitär und $u\sim_h u\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\sim_h\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

via $u\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

bzw. $\begin{pmatrix}(1-f)+\cos t\, f&\sin t\, x\\-\sin t\, x^*&(1-e)+\cos t\, e\end{pmatrix}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$



Nach 3.10b also $\begin{pmatrix}e&\\&0\end{pmatrix}\sim_h u\begin{pmatrix}e&\\&0\end{pmatrix}u^*=\begin{pmatrix}f&\\&0\end{pmatrix}$

┌Nebenrechnung: $u\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-f)&x\\-x^*&(1-e)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x&-(1-f)\\(1-e)&x^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*&(1-e)\\-(1-f)&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f+(1-f)&0\\0&(1-e)+\dots\end{pmatrix}$

$x(1-e)=xx^*x(1-e)=xe(1-e)=0$

└

└

3.12 Def: Sei A eine C^*-Algebra. Setze

$$M_\infty(A) := \{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid a_{ij}\in A,\ a_{ij}\neq 0 \text{ endlich oft}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(A)$$

mit $M_n(A) \subseteq M_{n+1}(A)$ per $x \longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.13 Bem: $M_n(A) \subseteq M_\infty(A)$ per $\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid a_{ij}=0,\ i>n \text{ oder } j>n\}$

Also besitzt $M_\infty(A)$ eine C^*-Norm $\|x\| = \|x\|_{M_n(A)}$ für $x\in M_n(A) \subseteq M_\infty(A)$,

ist hiermit jedoch nicht vollständig.

3.14 Def: Setze $H(A) := \{[p] \mid p \text{ Projektion in } M_\infty(A)\}$

(d.h. $\exists n: p\in M_n(A)$ Proj.)

und $[\cdot]$ Äquivalenzklasse bzgl. $\sim_h$ oder $\sim$ in $M_\infty(A)$.

(nach 3.11 ist $p,q\in M_\infty(A) \Rightarrow p,q\in M_n(A)$ für n groß,

dann $p\sim q$ in $M_n(A)\subseteq M_\infty(A) \overset{3.11}{\Longrightarrow} p\sim_h q$ in $M_{2n}(A)\subseteq M_\infty(A)$

Und $p\sim_h q$ in $M_n(A)\subseteq M_\infty(A) \Rightarrow p\sim_h q$ in $M_2(M_n(A)) \overset{3.11}{\Longrightarrow} p\sim q$ in $M_\infty(A)$)

3.15 Prop.: $H(A)$ ist eine abelsche Halbgruppe per

$[p]+[q] := [p'+q']$, wobei $p',q'\in M_\infty(A)$ Proj. mit $p\sim p',\ q\sim q',\ p'q'=0$.

und neutralem Element $[0]$.

⌈Bew: wohldef: Seien $p,q\in M_n(A)$ Proj. Setze $p' := \begin{pmatrix} p & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $q' := \begin{pmatrix} 0 & \\ & q \end{pmatrix}$.

Dann ist $p\sim p'$ und $q\sim q'$ (per $v := uq'$, $u := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ unitär), $p'q'=0$.

Seien nun p'',q'' mit $p\sim p'',\ q\sim q'',\ p''q''=0$, dann gilt

$p'\sim p'',\ q'\sim q'',\ p'\perp q',\ p''\perp q'' \overset{3.9(c)}{\Longrightarrow} [p'+q'] = [p''+q'']$

Assoz., Kommutativität, neutr. El.: ✓ ⌋

3.16 <u>Bem</u> (Grothendieckgruppe): Sei H eine abelsche Halbgruppe. Setze $G(H) := {}^{H\times H}/_{\Delta}$ wobei $\Delta := \{(x,x) \mid x \in H\}$ Diagonale.
Mit anderen Worten, in $H \times H$ gilt:
$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) :\Leftrightarrow \exists z_1, z_2 \in \Delta : (a_1, b_1) + z_1 = (a_2, b_2) + z_2$
[Bsp: $(\mathbb{N}, +)$ ergibt $G(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$ per $\{(n,m) \mid n,m \in \mathbb{N}\} \xrightarrow{n-m} \mathbb{Z}$

Dann ist $G(H)$ die einhüllende <u>Grothendieckgruppe</u> zu H.
⌜Habe $-(a,b)^\circ = (b,a)^\circ$, denn $(a,b) + (b,a) = (a+b, a+b) \in \Delta$, d.h.
⌞ $(a,b)^\circ + (b,a)^\circ = (a+b, a+b)^\circ = 0$ neutr. El. in $G(H)$. $\Rightarrow G(H)$ ist Gruppe.

Außerdem ist $G(H)$ abelsch.
Habe folgende <u>Grothendieck-Abbildung</u>: $\varphi: H \to G(H)$, $a \mapsto (a+x, x)^\circ$ (x bel.)
Mit $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Die Abbildung ist jedoch weder injektiv noch surjektiv. Sie hat folgende universelle Eigenschaft:
Ist $\psi: H \to G$ ein Halbgruppenhom. in eine Gruppe G, so ex. genau ein Gruppenhom. $\alpha: G(H) \to G$ mit $\alpha((a,b)^\circ) = \psi(a) - \psi(b)$,
also

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & G(H) \arrow[d, dashed, "\exists!\,\alpha"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Insofern sind die Elemente in $G(H)$ der Form $\varphi(x) - \varphi(y)$ für $x, y \in H$. (auch: $(a,b)^\circ = \underbrace{(a+b, b)^\circ}_{\varphi(a)} - \underbrace{(a+b, a)^\circ}_{\varphi(b)}$)

Die Grothendieckkonstruktion ist außerdem funktoriell:
Ist $\alpha: H \to H'$ ein Homomorphismus von Halbgruppen, so ex. genau ein Gruppenhom. $G(\alpha): G(H) \to G(H')$ mit

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & H' \arrow[d, "\varphi'"] \\ G(H) \arrow[r, "G(\alpha)"'] & G(H') \end{tikzcd}$$

3.17 Def.: Sei A eine unitale C^*-Algebra. Setze

$$K_0(A) := G(H(A)) = \{([p],[q])^\circ \mid p,q \in M_\infty(A) \text{ Proj.}\}$$

3.18 Bsp.: (a) $K_0(0) = 0$ (denn $M_\infty(0) = 0$)

(b) $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, denn für $p,q \in M_n(\mathbb{C})$ Projektionen ist $p \sim q \underset{\text{(isometrisch)}}{\Longleftrightarrow} \dim p\mathbb{C}^n = \dim q\mathbb{C}^n \Leftrightarrow \operatorname{rang} p = \operatorname{rang} q$.

Also $H(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$ (über die Dimensionen $n \in \mathbb{N}$).

5.6.2012

3.19 Satz: Die Abbildung $K_0 : \{C^*_{\text{unitale}}\text{-Algebren}\} \to \{\text{abel. Gruppen}\}$ hat folgende Eigenschaften:

(a) K_0 ist funktoriell für unitale Homomorphismen.

d.h. $\varphi : A \to B$ unital $\Rightarrow \exists K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$

und $A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C$ unital $\Rightarrow K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(\varphi) \circ K_0(\psi)$

(b) K_0 ist homotopieinvariant.

Sind $\alpha, \beta : A \to B$ homotop, so ist $K_0(\alpha) = K_0(\beta)$

Sind $A \sim_h B$ homotop, so ist $K_0(A) = K_0(B)$

(siehe Exkurs 3.20 zur Homotopie)

(c) K_0 ist additiv.

Die kanonischen Abbildungen $\pi_1 : A \oplus B \to A$, $(a,b) \mapsto a$, $\pi_2 : A \oplus B \to B$, $(a,b) \mapsto b$

ergeben einen Isomorphismus $K_0(A \oplus B) \xrightarrow[\cong]{K_0(\pi_1) \oplus K_0(\pi_2)} K_0(A) \oplus K_0(B)$

(d) K_0 ist stabil.

Die kanonische Einbettung $j : A \hookrightarrow M_n(A)$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix}$ induziert einen Isomorphismus in K-Theorie $K_0(A) \xrightarrow[\cong]{K_0(j)} K_0(M_n(A))$

3.20 <u>Exkurs (Homotopie)</u>: (a) Seien A, B unitale C^*-Algebren und $\alpha, \beta: A \to B$ unitale Hom. α und β heißen <u>homotop</u>, falls

(i) $\exists\, \varphi_t: A \to B$ unitale Hom, $t \in [0,1]$ mit $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_1 = \beta$ und $t \longmapsto \varphi_t(x)$ ist stetig $\forall x \in A$.

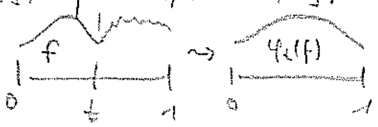
oder (ii) $\exists\, \varphi: A \to \mathcal{C}([0,1], B)$ Hom. mit $ev_0 \circ \varphi = \alpha$, $ev_1 \circ \varphi = \beta$ (wobei $ev_x: \mathcal{C}([0,1], B) \to B$ mit $ev_x(f) = f(x)$ für $x \in [0,1]$)

Die Bedingungen (i) und (ii) sind äquivalent.

(b) Die C^*-Algebren A und B heißen <u>homotop</u>, falls es Abbildungen $\alpha: A \to B$ und $\beta: B \to A$ gibt, so dass $\alpha \circ \beta \sim_h id_B$, $\beta \circ \alpha \sim_h id_A$.

Bsp.: $A \sim_h \mathcal{C}([0,1], A)$. Betrachte nämlich $\alpha: A \to \mathcal{C}([0,1], A)$, $x \longmapsto x \cdot 1$ (konstante Fkt) und $\beta: \mathcal{C}([0,1], A) \to A$, $f \longmapsto f(0)$. Dann ist $\beta \circ \alpha = id_A$ und $\alpha \circ \beta \sim_h id_{\mathcal{C}([0,1],A)}$.

Sei $\varphi_t: \mathcal{C}([0,1], A) \to \mathcal{C}([0,1], A)$, $\varphi_t(f)(s) := f(ts)$ für $s, t \in [0,1]$.

(strecke also die Funktion von $[0,t]$ auf $[0,1]$ )

Dann ist $\varphi_0 = \alpha \circ \beta$ und $\varphi_1 = id_{\mathcal{C}([0,1],A)}$

(c) Eine C^*-Algebra A heißt <u>kontrahierbar</u>, falls $A \sim_h 0$.

Bsp.: Ist A eine C^*-Algebra, so ist $\mathcal{C}_0((0,1], A) = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) \mid f(0) = 0\}$ kontrahierbar, denn mit $\alpha: 0 \to \mathcal{C}_0((0,1], A)$, $0 \longmapsto 0$, $\beta: \mathcal{C}_0((0,1], A) \to 0$, $f \longmapsto f(0) = 0$ ist $\beta \circ \alpha = id_0$ und $\alpha \circ \beta \sim_h id_{\mathcal{C}_0((0,1],A)}$ mit $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ wie oben.

Ebenso ist $CA := \mathcal{C}_0([0,1), A)$ kontrahierbar.

(d) Mit Satz 3.19(b) ist $K_0(\mathcal{C}([0,1], A)) = K_0(A)$ und $K_0(CA) = 0$.

Beweis von 3.19: (a) Abbildungen in K-Theorie entstehen folgendermaßen:

$\varphi : A \longrightarrow B$

$\overset{\text{induziert}}{\rightsquigarrow}$ $M_\infty(\varphi) : M_\infty(A) \to M_\infty(B)$, $(a_{ij}) \longmapsto (\varphi(a_{ij}))$

$\overset{\text{induziert}}{\rightsquigarrow}$ $H(\varphi) : H(A) \longrightarrow H(B)$, $[p] \longmapsto [M_\infty(\varphi)(p)]$

$\overset{\text{induziert}}{\rightsquigarrow}$ $K_0(\varphi) : G(H(A)) \longrightarrow G(H(B))$, $([p],[q])^\circ \longmapsto ([M_\infty(\varphi)(p)], [M_\infty(\varphi)(q)])^\circ$

Dies zeigt auch $K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(\varphi) \circ K_0(\psi)$

(b) Sei $\varphi_t : A \to B$ Homotopie für $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_1 = \beta$.

Dann ist $[M_\infty(\varphi_t)(p)] = [M_\infty(\varphi_0)(p)]$ $\forall t$, also

ist $H(A) \to H(B)$ $\underset{\forall t}{\text{konstant}}$ $\Longrightarrow$ $K_0(A) \to K_0(B)$ $\underset{\forall t}{\text{konstant}}$.

(Klar: K_0 dividiert Homotopien raus)

(c) $M_\infty(A \oplus B) \cong M_\infty(A) \oplus M_\infty(B)$ (klar auf Matrixebene)

$\Longrightarrow H(A \oplus B) \cong H(A) \oplus H(B) \Longrightarrow K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B)$

(benutze universelle Eig. der Grothendieck-Abb.)

(d) $M_\infty(A) \xrightarrow{M_\infty(j)} M_\infty(M_n(A)) \cong M_\infty(A)$ Bijektion □

3.21 Bspe: • $K_0(M_n(\mathbb{C})) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$

• $K_0(\mathbb{C}^n) = K_0(\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}) = \mathbb{Z}^n$

• $K_0(C([0,1], A)) = K_0 A$, $K_0(CA) = 0$

3.22 Bem: Ist die C^*-Algebra nicht notwendigerweise unital,

so setze $K_0(A) := \operatorname{Kern} K_0(\sigma) \subseteq K_0(\tilde{A})$,

wobei $\sigma : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, $K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\sigma)} K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$
$\quad (a,\lambda) \longmapsto \lambda$

Ist A unital, so ist $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ und

$K_0(\tilde{A}) = \underset{\underset{\operatorname{Kern} K_0(\sigma)}{\parallel}}{K_0(A)} \oplus K_0(\mathbb{C})$ $\Longrightarrow$ die alte und die neue Def. stimmen überein.

Satz 3.19 gilt auch für nicht unitale C^*-Algebren.