§4 Induktive Limiten und Stetigkeit von K

Eine wichtige C^*-Algebra ist die Algebra der kompakten Operatoren $K(H)$ auf einem Hilbertraum. Um ihre K-Theorie zu bestimmen benötigen wir eine weitere Eigenschaft des K-Funktors, die Stetigkeit. Nebenbei lernen wir eine wichtige Konstruktion von C^*-Algebren kennen.

4.1 Def.: (a) Ein <u>induktives System von Gruppen</u> $(G_n, \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch Gruppen G_n und Gruppenhomomorphismen $\gamma_n : G_n \to G_{n+1}$.

(b) Ein <u>induktives System von C^*-Algebren</u> $(A_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch C^*-Algebren A_n und $*$-Hom. $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$.

4.2 Prop.: Sei $(A_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein induktives System von C^*-Algebren [bzw. Gruppen]. Dann ex. eine (bis auf Isomorphie) eindeutige C^*-Algebra [Gruppe] $\varinjlim_{\varphi_n} A_n$, der „<u>induktive Limes</u>" und $*$-Hom. $\overline{\varphi}_n : A_n \to \varinjlim_{\varphi_n} A_n$ mit der folgenden universellen Eigenschaft:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \varinjlim_{\varphi_n} A_n \arrow[dd, dashed, "\exists!\beta"] \\
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[urr, bend left, "\overline{\varphi}_n"] \arrow[drr, bend right, "\beta_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, "\overline{\varphi}_{n+1}"] \arrow[dr, "\beta_{n+1}"'] & \cdots \\
 & & & B
\end{tikzcd}
$$

alle Diagramme kommutieren

(also: $\forall B$ mit (β_n) $\exists! \beta$)

Bew: $\mathfrak{A} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid \exists N\in\mathbb{N} : x_{n+1} = \varphi_n x_n \ \forall n\geq N\}$

Seien $(x_n),(y_n)\in\mathfrak{A}$. $\quad (x_n)\sim(y_n) :\Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{N} : x_n = y_n \ \forall n\geq N$.

Da alle φ_n *-Hom. und also normverkleinernd sind, ist $\|[x_n]\| := \lim\|x_n\|_{A_n}$ eine C^*-Halbnorm auf $\mathfrak{A}/\sim$.

Setze $A := \varinjlim_{\varphi_n} A_n := \overline{\dfrac{\mathfrak{A}/\sim}{\{[x_n] \mid \|[x_n]\|=0\}}}^{\|\cdot\|}$. Dies ist eine C^*-Algebra. (mit komponentenw. Verknüpfg)

Setze $\overline{\varphi}_n(x) := (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n}}{x},\varphi_n x,\varphi_{n+1}\varphi_n x,\dots)\in A$ für $x\in A_n$.

univ. Eig.: Zu $[(x_n)]\in A$ ist $(\beta_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ schließlich konstant.

[$\exists N: x_{n+1}=\varphi_n x_n$. Sei $n\geq N$. Dann $\beta_n(x_n)=\beta_{n+1}(\varphi_n x_n)=\beta_{n+1}(x_{n+1})$]

Also ist $\beta([(x_n)]) := \lim_{n\to\infty}\beta_n(x_n)$ wohldef. und eind., $\beta\overline{\varphi}_n = \beta_n$.

Eind. von A: Sei A' weitere C^*-Algebra mit dieser univ. Eig.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & A \arrow[d, "\beta"] \arrow[dd, bend left, "id"] \\
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[urrr, "\overline{\varphi}_n"] \arrow[rrr, "\varphi'_n"] \arrow[drrr, "\overline{\varphi}_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[urr, "\overline{\varphi}_{n+1}"] \arrow[rr, "\varphi'_{n+1}"] \arrow[drr, "\overline{\varphi}_{n+1}"'] & \cdots & A' \arrow[d, "\beta'"] \\
 & & & & A
\end{tikzcd}$$

und $id_A : A\to A$ eind.

$\Rightarrow \beta'\circ\beta = id_A$.

Ebenso $\beta\circ\beta' = id_{A'}$

Für Gruppen genauso, nur ohne Norm: $\varinjlim G_n := \mathfrak{A}/\sim$

4.3 Bem: (a) Seien $\varphi_n : A_n \to B$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n(A_n)\subseteq B$ dicht. Dann ist $\varphi : \varinjlim A_n \to B$ surj. Sind alle φ_n inj., so ist φ inj.

(b) Sind $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots\subseteq B$, so ist mit $A_n \xhookrightarrow{\iota_n} A_{n+1}$ $\varinjlim_{\iota_n} A_n = \overline{\bigcup A_n}\subseteq B$

(c) Sind alle A_n einfach, so auch $\varinjlim A_n$.

(d) Ist $(A_n,\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein ind. System, so auch $(M_k(A_n),\varphi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lim M_k(A_n) = M_k(\lim A_n)$

4.4 Satz: (A_n, φ_n) ein induktives System. Dann
$$K_0(\varinjlim_{\varphi_n} A_n) = \varinjlim_{K_0(\varphi_n)} K_0(A_n) \quad \text{, d.h. } K_0 \text{ ist stetig.}$$

⌜**Beweisidee:**

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K_0(A_n) \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "s_n"] \arrow[rrrd, "K_0(\overline{\varphi}_n)"'] & K_0(A_{n+1}) \arrow[r] \arrow[rr, "s_{n+1}"] \arrow[rrd, "K_0(\overline{\varphi}_{n+1})"] & \ldots & \lim K_0(A_n) \arrow[d, dashed, "\exists ! \beta"] \\
& & & & K_0(A)
\end{tikzcd}$$

$A := \varinjlim A$

β ist surj.: Sei $p \in M_k \tilde{A}$ eine Projektion. Zu $\delta > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$ und $h = h^* \in M_k(\overline{\varphi}_N \tilde{A}_N)$ mit $\|p - h\| < \delta < \frac{1}{4}$. Also $\frac{1}{2} \notin \mathrm{sp}\, h$ und somit ex. $q := f(h)$ Proj. nach F-Kalkül in $M_k(\overline{\varphi}_N \tilde{A}_N)$.

$\Rightarrow K_0(\overline{\varphi}_N)([q],[1_k])' = ([p],[1_k])'$ (dies gezeigt, s. Lemma 3.1)

β ist inj.: Seien $([p],[1_k])', ([q],[1_k])' \in S_N K_0(A_N)$ $(\varinjlim K_0(A) = \bigcup S_N K_0(A)$

mit $\beta([p],[1_k])' = \beta([q],[1_k])' \Rightarrow ([\overline{\varphi}_N(p)],[\overline{\varphi}_N(1_k)])' = ([\overline{\varphi}_N(q)],[\overline{\varphi}_N(1_k)])'$

$\rightsquigarrow \overline{\varphi}_N(p) \sim \overline{\varphi}_N(q)$ in $M_k(\tilde{A}) \Rightarrow \exists\, w \in M_k(\tilde{A})$ unitär mit $w \overline{\varphi}_N(p) w^* = \overline{\varphi}_N(q)$

$\rightsquigarrow \exists\, w' \in M_k(\overline{\varphi}_N \tilde{A}_N) \rightsquigarrow ([p],[1_k])' = ([q],[1_k])'$ ⌟

4.5 Bsp.: (a) $M_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow M_{n+1}(\mathbb{C})$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix}$ liefert $\varinjlim M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$

und
$$\begin{tikzcd}
K_0(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0(M_{n+1}(\mathbb{C})) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \arrow[r] & K_0(\mathcal{K}) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

(b) Ebenso gilt $K_0(A \otimes \mathcal{K}) = K_0(A)$

$$\begin{tikzcd}
K_0(M_n A) \arrow[r] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0(M_{n+1} A) \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & K_0(A \otimes \mathcal{K}) \\
K_0(A) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "id"] & K_0(A) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & K_0(A) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

(c) $M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow[x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & \\ & x \end{smallmatrix}\right)]{} M_4(\mathbb{C}) \to M_8(\mathbb{C}) \to \ldots \to M_{2^\infty}(\mathbb{C})$ (Def.)
"$\underline{\text{UHF}}$"

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} K_0(M_{2^k}(\mathbb{C})) & \to & K_0(M_{2^{k+1}}(\mathbb{C})) & \to & \ldots & \to & K_0(M_{2^\infty}(\mathbb{C})) \\ \cong & & \cong & & & & \cong \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \to & \ldots & \to & \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \end{array}$$

$$[e_{11}] \mapsto [e_{11} \otimes 1_{M_2}] = [e_{11}] + [e_{11}]$$

(d) Sind B_n endl.dim. C^*-Algebren, so heißt
$\varinjlim_{\varphi_n} B_n$ $\underline{\text{AF-Algebra}}$

4.6 $\underline{\text{Bsp.:}}$ Es ist $K_0(\mathcal{L}(H)) = 0$, H separabel.

$\ulcorner$ Sei $p \in M_n(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H \oplus \ldots \oplus H)$ eine Projektion.
Dann ist $\tilde{p} = \begin{pmatrix} p & \\ & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathcal{L}(H))$ orthogonal zu $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathcal{L}(H))$.
Also gilt in $\underset{\uparrow \text{ Halbgruppe}}{H}(\mathcal{L}(H))$ (HR): $\quad [p] + \left[\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right]$

Denn $\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{n+1})$ sind unendliche Projektionen, also Murray-von Neumann-äquivalent.
Sei nun $([a],[b])^\circ \in K_0(\mathcal{L}(H))$. Dann

$$([a],[b])^\circ = \left([a] + \left[\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right], [b] + \left[\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right]\right)^\circ = \left(\left[\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right]\right)^\circ = 0$$

$\llcorner$

Allgemein gilt:

- Sei M unendlicher Faktor ($\mathrm{I}_\infty, \mathrm{II}_\infty, \mathrm{III}$), dann ist $K_0(M) = 0$.
  (Unter Benutzung: $M \subseteq \mathcal{L}(H)$ Faktor, H sep., $e, f \in M$ unendl. Proj. $\Rightarrow e \sim f$)
- Sei M Typ II_1, dann $K_0(M) = \mathbb{R}$.

§5 Halbexaktheit von K_0

Kenne nun $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ und $K_0(\mathcal{L}(H)) = 0$. Was ist $K_0(Q(H))$, wobei $Q(H) = \mathcal{L}(H) / \mathcal{K}(H)$ Calkinalgebra?
Ziel ist es, eine der wichtigsten Eigenschaften von K_0 (und K_1) zu beweisen: die Halbexaktheit und die Existenz von 6-Term-Sequenzen in K-Theorie (Letzteres in §7).
Benötige hierfür eine andere Darstellung von K_0. (5-1a)

5.1 **Lemma**: Sei A eine C^*-Algebra, $\sigma: \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(a,\lambda) \longmapsto \lambda$.

(a) $K_0(A) = \{ ([p],[1_n])^\circ \mid [p],[1_n] \in V(\tilde{A}),\ \sigma(p) \sim 1_n \} \subseteq K_0(\tilde{A})$

(b) $([p],[1_n])^\circ = 0 \in K_0(A) \iff \exists k \ \begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix} \sim 1_{n+k}$

Bew: (a) „$\supseteq$" $K_0(\sigma)([p],[1_n])^\circ = ([\sigma(p)],[1_n])^\circ = ([1_n],[1_n])^\circ = 0$, $K_0(A) = \operatorname{Ker} K_0(\sigma)$

„$\subseteq$" Sei $([p],[q])^\circ \in \operatorname{Ker} K_0(\sigma)$, $p,q \in M_n(\tilde{A})$. Dann ist

$$([p],[q])^\circ \underset{\uparrow}{=} \left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1_n - q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q & \\ & 1_n - q \end{pmatrix}\right]^\circ = \left(\left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1_n - q \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix}\right]\right)^\circ$$

Addiere das natür. El. $([1_n - q],[1_n - q])^\circ$

[$v := \begin{pmatrix} q & 1_n - q \\ 1_n - q & q \end{pmatrix} \in M_{2n}(\tilde{A})$ unitär, $v \begin{pmatrix} q & \\ & 1_n - q \end{pmatrix} v^* = \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$

Also $\begin{pmatrix} q & \\ & 1_n - q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$ via $w := v \begin{pmatrix} q & \\ & 1_n - q \end{pmatrix}$]

Und $0 = K_0(\sigma)([p],[q])^\circ = ([\sigma(p)],[\sigma(q)])^\circ \Rightarrow \exists x: \begin{pmatrix} \sigma(p) & \\ & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma(q) & \\ & x \end{pmatrix}$

Also $e := \begin{pmatrix} \sigma\begin{pmatrix} p & \\ & 1_n - q \end{pmatrix} & \\ & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma(p) & & \\ & x & \\ & & 1_n - \sigma(q) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma(q) & & \\ & 1_n - \sigma(q) & \\ & & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & & \\ & 0 & \\ & & x \end{pmatrix} =: e'$

$f := f' := \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 - x \end{pmatrix}$, also $e \perp f$, $e' \perp f' \overset{3.9(c)}{\Longrightarrow} \sigma\begin{pmatrix} p & \\ & 1_n - q \end{pmatrix} = e + f \sim e' + f' = \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$

(b) $([p],[1_n])^\circ = 0 \in K_0(A)$

$\iff \exists e \in M_k(\tilde{A}) \ \left[\begin{pmatrix} p & \\ & e \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1_n & \\ & e \end{pmatrix}\right]$

$\overset{\text{s.o.}}{\iff} \exists k: \left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_k \end{pmatrix}\right]$

[„$\Rightarrow$": $\begin{pmatrix} p & & \\ & 1_k & \\ & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p & & \\ & e & \\ & & 1_k - e \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & & \\ & e & \\ & & 1_k - e \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & & \\ & 1_k & \\ & & 0 \end{pmatrix}$]

$\lrcorner$

Etappenziele in §5:

- K ist halbexakt, d.h.

  $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt $\Rightarrow$ $KI \to KA \to KB$ exakt

- Verlängere diese Folge zu

  $\dots \to K(S^2B) \to K(SI) \to K(SA) \to K(SB) \to KI \to KA \to KB$

  wobei $SA := C_0((0,1),A)$ „Einhängung"

- K ist splitexakt, d.h.

  $0 \to I \to A \leftrightarrows B \to 0$ zerfallend $\Rightarrow$ $0 \to KI \to KA \to KB \to 0$ exakt

Später (§6, §7):

- $K(SA) \cong K_1(A)$ und $K(S^2A) \cong K_0(A)$ (Bottperiodizität)

  Also

$$\begin{tikzcd} KI \arrow[r] & KA \arrow[r] & KB \arrow[d] \\ K_1B \arrow[u] & K_1A \arrow[l] & K_1I \arrow[l] \end{tikzcd}$$

  für jede exakte Sequenz $0 \to I \to A \to B \to 0$

  (das vielleicht wichtigste Werkzeug in der K-Theorie)

5.2 <u>Erinnerung:</u> $\ldots \to A_i \xrightarrow{\varphi_i} A_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} A_{i+2} \to \ldots$, wo (A_i) Objekte und (φ_i) Morphismen. Die Sequenz heißt <u>exakt</u>, falls $\operatorname{Kern} \varphi_{i+1} = \operatorname{Bild} \varphi_i$.

$0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ ist <u>exakt</u> $\iff$ ι inj., π surj., $\operatorname{Kern} \pi = \operatorname{Bild} \iota$.

$0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ heißt <u>zerfallend</u>

$\iff$ die Sequenz ist exakt und $\exists\, \psi : C \to B$ Morphismus mit $\pi \circ \psi = \mathrm{id}_C$, also

$$0 \to A \to B \underset{\pi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} C \to 0$$

Für C^*-Algebren ist $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt

$\iff I \lhd A$ und $B = A/I$

Sind A, B, C Gruppen und ist $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \underset{\pi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} C \to 0$ zerfallend, so ist

$$\alpha : A \oplus C \xrightarrow{\cong} B, \quad (x,y) \mapsto \iota x + \psi y$$

ein Isomorphismus.

$\ulcorner$ α inj.: $\alpha(x,y) = 0 \Rightarrow y = \pi(\iota x + \psi y) = 0 \overset{\iota \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x = 0$

α surj.: $x \in B$, dann $x - \psi\pi x \in \operatorname{Kern} \pi = \operatorname{Bild} \iota \Rightarrow x \in \operatorname{Bild} \iota + \operatorname{Bild} \psi = \operatorname{Bild} \alpha$

⫫

Bspl.: $0 \to A \to B \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \to 0$ exakt $\Rightarrow$ Seq. zerfällt mit $\psi : \mathbb{Z} \to B,\ n \mapsto nb$, $\pi(b) = 1 \in \mathbb{Z}$. Also $B \cong A \oplus \mathbb{Z}$

Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ ist exakt, aber nicht zerfallend (da $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

5.3 <u>Satz:</u> Ist $0 \to I \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ exakte Folge von C^*-Algebren, so ist $K_0(I) \xrightarrow{K_0(j)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(B)$ exakt.

Der Funktor K_0 ist also <u>halbexakt</u>.

$\ulcorner$ <u>Bew.:</u> „$\supseteq$" $\pi \circ j = 0 \Rightarrow K_0(\pi) \circ K_0(j) = 0 \Rightarrow \operatorname{Bild} K_0(j) \subseteq \operatorname{Kern} K_0(\pi)$.

„$\subseteq$“ $([p],[1_n])^\circ \in K_0(A)$ mit $K(\pi)([p],[1_n])^\circ = ([\pi(p)],[1_n])^\circ = 0$,
und 5.1(b) also $\begin{pmatrix}\pi(p) & \\ & 1_k\end{pmatrix} \sim 1_{n+k}$ für ein k. $p' := \begin{pmatrix} p & \\ & 1_k\end{pmatrix} \in M_N(\tilde{A})$
Also $\pi(p') \sim 1_{n+k}$. Nach 3.11 & 3.10d ex. $u \in U_0(M_{2N}(\tilde{B}))$ mit $u\pi(p')u^* = 1_{n+k}$. Da $\pi : M_{2N}(\tilde{A}) \to M_{2N}(\tilde{B})$ surj., ex. $w \in U_0(M_{2N}(\tilde{A}))$ mit $\pi(w) = u$ (3.4c). Es ist
$\pi(wp'w^* - 1_{n+k}) = u\pi(p')u^* - 1_{n+k} = 0 \Rightarrow wp'w^* - 1_{n+k} \in \ker \pi \overset{\text{"}}{=} \text{Bild}\, j$
Somit $\exists x \in \tilde{J}$ Proj. mit $j(x) = wp'w^* \sim p'$.

⌈ $\exists a \in \tilde{J}$ mit $j(a) = wp'w^* - 1_{n+k}$, $\exists b \in \tilde{J}$ mit $j(b) = 1_{n+k}$. $x := a + b \in \tilde{J}$
⌊ mit $j(x) = wp'w^*$ und x Projektion, da j injektiv ($j(x^2) = j(x)^2 = j(x)$)

$\Rightarrow ([p'],[1_{n+k}])^\circ = K(j)([x],[1_{n+k}])^\circ$
$\|$
$([p],[1_n])^\circ$ $\quad \left[([\begin{pmatrix} p & \\ & 1_k\end{pmatrix}], [\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_k\end{pmatrix}]) + (0,0) = ([p],[1_n]) + ([\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1_k\end{pmatrix}], [\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1_k\end{pmatrix}]) \right.$
⌊

5.4 Def.: Sei A C^*-Algebra, X lok.komp. Raum. $AX := C_0(X, A)$.

5.5 Lemma: $0 \to J \to A \to B \to 0$ exakt $\Rightarrow$ $0 \to JX \to AX \xrightarrow{\pi_X} BX \to 0$ exakt

⌈Bew: $JX \hookrightarrow AX$, $f \mapsto f$: ✓, $JX = \ker \pi_X$: $f \in JX \Leftrightarrow f(t) \in J\ \forall t \Leftrightarrow \underbrace{\pi_X(f)(t)}_{\pi(f(t))} = 0\ \forall t$
π_X surj.: Sei $f \in C_0(X)$, $x \in B$, $g(t) := f(t)x$. Mit $h(t) := f(t)y$ für $\pi(y) = x$ ist $g = \pi_X(h) \in \text{Bild}\, \pi_X$. Mit Urysohn (Part. der Eins) sind jedoch die Linearkombinationen solcher Funktionen g dicht in BX, also $\pi_X(AX) \subseteq BX$ dicht, d.h. „$=$“, da $\pi_X(AX)$ C^*-Alg.
⌊

5.6 Def.: A, B C^*-Algebren, $\alpha : A \to B$ Hom.

$$C_\alpha := \{(x,y) \in A \oplus B[0,1) \mid \alpha(x) = y(0)\} \quad \text{„Abbildungskegel“}$$

$$Z_\alpha := \{(x,y) \in A \oplus B[0,1] \mid \alpha(x) = y(0)\} \quad \text{„Abbildungszylinder“}$$

(Idee: C_α = „$B[0,1)$ mit Startbedingung $\alpha(x)$“)

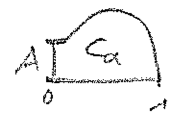
5.7 Bem: Die Abbildungskegel liegen in K-Theorie nah an den Idealen der Sequenzen (an I von $0\to I\to A\to B\to 0$). Andererseits liefern sie leicht (weitere) exakte Sequenzen. Sie werden der Schlüssel zum zweiten Etappenziel sein: Den unendlich langen Sequenzen

$$\dots\to K_0(S^2B)\to K_0(SI)\to K_0(SA)\to K_0(SB)\to K_0 I\to K_0 A\to K_0 B$$

Wir haben: Sei $\alpha: A\to B$ ein Homomorphismus.

(a) α surj., $I:=\operatorname{Ker}\alpha$, also $0\to I\to A\xrightarrow{\alpha} B\to 0$ exakt.
Dann $0\to \underset{x\mapsto (x,0)\in A\oplus B[0,1)}{I\to C_\alpha}\to B[0,1)\to 0$ exakt.

(b) α inj., dann $C_\alpha\cong\{f\in B[0,1)\mid f(0)\in A\}$



(c) α surj. $\Rightarrow$ $0\to SB\to C_\alpha\to A\to 0$ exakt
$y\mapsto (0,y)$, $(x,y)\mapsto x$

5.8 Lemma: Sei $\alpha: A\to B$ ein Hom.

(a) $\underset{(x,y)\mapsto x}{Z_\alpha\xrightarrow{\varphi}A}$, $\underset{x\mapsto (x,\alpha(x)1)}{A\xrightarrow{\psi}Z_\alpha}$ sind homotopieinvers ($\varphi\circ\psi=id_A$, $\psi\circ\varphi\sim_h id_{Z_\alpha}$)
(d.h. $K_0 A\cong K_0 Z_\alpha$)

(b) $0\to C_\alpha\xrightarrow{\subseteq}Z_\alpha\to B\to 0$ exakt
$(x,y)\mapsto y(1)$

(c) $K_0(C_\alpha)\xrightarrow{K_0(\pi)}K_0(A)\xrightarrow{K_0(\alpha)}K_0(B)$ ist exakt (Hinweis auf „$K_0(C_\alpha)=K_0(I)$")

Bew: (a) wie in 3.20: $\rho_t: Z_\alpha\to Z_\alpha$, $(x,y)\mapsto (x,y_t)$, $y_t(s):=y(ts)$.
$\rho_0(x,y)=(x,y(0)1)=(x,\alpha(x)1)=\psi\varphi(x)$, $\rho_1=id_{Z_\alpha}$

(c) Nach 5.3 ist

$$\begin{array}{ccccc} K_0 C_\alpha & \xrightarrow{\subseteq} & K_0 Z_\alpha & \xrightarrow{K_0(\mu)} & K_0 B\\ =\downarrow & \circlearrowleft & \cong\downarrow K_0(\varphi) & \circlearrowleft & \downarrow =\\ K_0 C_\alpha & \xrightarrow[K_0(\pi)]{} & K_0 A & \xrightarrow[K_0(\alpha)]{} & K_0 B\end{array}$$

wo $\pi: C_\alpha\to A$, $(x,y)\mapsto x$, $\mu: Z_\alpha\to B$, $(x,y)\mapsto y(1)$

und $\varphi(x,y)=x=\pi(x,y)$ $\forall (x,y)\in C_\alpha$ $\Rightarrow$ $K_0(\varphi)\circ$„$\subseteq$" $=K_0(\pi)$

sowie $\alpha\circ\varphi\sim_h\mu$, denn $\alpha\circ\varphi(x,y)=\alpha(x)=y(0)\sim_h y(1)=\mu(x,y)$

5.9 Def.: A C^*-Algebra $\quad CA := A[0,1)$ „Kegel über A"

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad SA := A(0,1)$ „Einhängung von A"

5.10 Lemma: S ist ein Funktor: $\alpha: A \to B$ Hom. $\Rightarrow \exists\, S_\alpha: SA \to SB$ Hom.

mit $S_\alpha(f)(t) = \alpha(f(t))$, $\quad S_{\alpha\circ\beta} = S_\alpha \circ S_\beta$

11.6.2012

5.11 Prop.: Sei $0 \to J \to A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ exakt.

(a)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "e"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "="] & B \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & SB \arrow[r] & C_\pi \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
$y \mapsto (0,y)$, $\quad (x,y) \mapsto x$

$e: J \hookrightarrow C_\pi$ (s. 5.7a), $\quad x \mapsto (x,0)$

(b1) ... (e ex., Diagr. komm., Seq. exakt)

(b) $K_0(C_e) = 0$, $\quad K_0(J) \xrightarrow{K_0(e)} K_0(C_\pi)$ Isom.

(c) $\ldots \to K_0(S^2B) \to K_0(SJ) \to K_0(SA) \to K_0(SB) \to K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(B)$ exakt

Bew.: (b) Habe $\quad 0 \to CJ \to C_e \to SCB \to 0 \quad$ exakt

(b1) $e: J \hookrightarrow C_\pi$ injektiv $\overset{5.7b}{\Longrightarrow} C_e = \{f \in CC_\pi \mid f(0) \in J\}$, $CJ \triangleleft C_e$ Ideal

$(J \subseteq C_\pi \Rightarrow CJ \subseteq CC_\pi)$

$f \in C_e, g \in CJ.\quad (fg)(t) = \overset{\in C_\pi}{f(t)}\,\overset{\in J \subseteq C_\pi}{g(t)} = (f(t)_x, f(t)_y)(g(t)_x, 0) = (\underbrace{\underbrace{f(t)_x}_{\in A}\underbrace{g(t)_x}_{\in J}}_{\in J}, 0)$

$C_\pi = \{(x,y) \in A \oplus B[0,1) \mid \pi(x) = y(0)\}$

$f \in C_e$ der Form $\quad f(t) = (f(t)_x, f(t)_y) \in C_\pi$,

d.h. $f(t)_y \in CB$ mit $f(t)_y(0) = f(t)_x \in A$. $\rightsquigarrow C_e \to SCB$

$\Rightarrow \quad \underset{\overset{3.20}{=}\,0}{K_0(CJ)} \to K_0(C_e) \to \underset{\substack{\| \\ K_0(CSB) \underset{3.20}{=} 0}}{K_0(SCB)} \quad$ exakt $\Rightarrow K_0(C_e) = 0$

Nach 5.8c ist $\quad \underset{\substack{\| \\ 0}}{K_0C_e} \to K_0J \xrightarrow{K_0e} K_0C_\pi \quad$ exakt $\Rightarrow K_0e$ inj.

Und $\quad 0 \to J \xrightarrow{e} C_\pi \to CB \to 0 \quad$ exakt nach 5.7(a)

$\Rightarrow \quad K_0J \xrightarrow{K_0e} K_0C_\pi \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{K_0CB} \quad$ exakt $\Rightarrow K_0e$ surj.

Also K_0e Isom.

(c)

$$\begin{tikzcd}
 & & K_0 J \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "K_0 e"] & K_0 A \arrow[r] \arrow[d, "="] & K_0 B & (1) \\
 & K_0 SB \arrow[ur, dashed, "\text{exakt fortgesetzt}"] \arrow[r] \arrow[d, "\cong (4)"'] & K_0 C_\pi \arrow[r] \arrow[d, "="] & K_0 A & & (2) \\
K_0 SA \arrow[ur, dashed, "K_0 S\pi"] \arrow[r] & K_0 C_\rho \arrow[r] & K_0 C_\pi & & & (3)
\end{tikzcd}$$

(1): $0 \to J \to A \to B \to 0$ exakt nach Vor.

(2): $0 \to SB \to C_\pi \xrightarrow{\rho} A \to 0$ exakt (5.7c) $\left(C_\pi = \{(x,y) \in A \oplus CB \mid \pi(x) = y(0)\} \right)$

$y \mapsto (0,y)$, $(x,y) \mapsto x$

(3): $0 \to SA \to C_\rho \to C_\pi \to 0$ exakt (5.7c) $\left(C_\rho = \{(x,y) \in C_\pi \oplus CA \mid x_0 = y(0)\} \right)$, $x = (x_0, y_0) \in C_\pi$

$(x,y) \mapsto x$, $y \mapsto (0,y)$

(4): nach (b) ist $\rightsquigarrow$ $0 \to SB \to C_\pi \xrightarrow{\rho} A \to 0$ $\quad K_0(SB) \cong K_0(C_\rho)$

von (2) nach (3): Iteration mit $0 \to \underset{SB}{J'} \to \underset{C_\pi}{A'} \xrightarrow{\pi' = \rho} \underset{A}{B'} \to 0$

$\rightsquigarrow \quad K_0 J' \to K_0 A' \to K_0 B'$

$K_0 \underset{SA}{SB'} \to K_0 \underset{C_\rho}{C_{\pi'}} \to K_0 \underset{C_\pi}{A'}$

$\llcorner$

5.12 Korollar: $0 \to J \to A \underset{\pi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} B \to 0$ zerfallend

$\Rightarrow 0 \to K_0 J \to K_0 A \to K_0 B \to 0$ zerfallend

D.h. K_0 ist splitexakt $\quad$ ($K_0 A \cong K_0 J \oplus K_0 B$ nach 5.2)

Bew.: $K_0 J \to K_0 A \underset{K_0 \pi}{\overset{K_0 \varphi}{\rightleftarrows}} K_0 B$ exakt, $K_0 \pi \, K_0 \varphi = 1 \Rightarrow K_0 \pi$ surj.

und $K_0 SJ \to K_0 SA \underset{K_0 S\pi}{\overset{K_0 S\varphi}{\rightleftarrows}} K_0 SB \xrightarrow{\alpha} K_0 J \xrightarrow{\beta} K_0 A$ exakt

mit $K_0 S\pi \, K_0 S\varphi = 1$, also $K_0 S\pi$ surj. $\Rightarrow \alpha = 0$ ($\ker \alpha = K_0 SB$)

$\Rightarrow \beta$ inj. ($\ker \beta = 0$)

$\llcorner$

6.1 Def.: Sei A eine unitale C^*-Algebra. Setze

$U(A) := \{u \in A \mid u \text{ unitär}\}$

$U^n(A) := \{u \in M_n(A) \mid u \text{ unitär}\}$

$U^\infty(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n(A)$ per $U^n(A) \hookrightarrow U^{n+1}(A)$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$U_0^n(A) := \{u \in U^n(A) \mid u \sim_h 1\}$

$U_0^\infty(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_0^n(A)$

6.2 Erinnerung: $U_0^n(A)$ ist eine normale Untergruppe von $U^n(A)$, also kann der Quotient gebildet werden (s. 3.5)

6.3 Def.: Sei A eine C^*-Algebra. $K_1(A) := U^\infty(\tilde{A}) \big/ U_0^\infty(\tilde{A})$

6.4 Prop.: $K_1(A)$ ist eine abelsche Gruppe per $[u_1][u_2] = [u_1 u_2]$.

Bew.: Für $u, w \in U^\infty \tilde{A}$ bedeuten die Äquivalenzklassen:

$[u] = [w] \iff \exists g \in U_0^\infty \tilde{A} : u = wg$

"$\Rightarrow$" $w^* u \in U_0^\infty(\tilde{A}) \Rightarrow \exists g_t \in U_0^\infty \tilde{A}$ mit $g_1 = w^* u$, $g_0 = 1$, also $w g_1 = u$, $w g_0 = w$, $g := g_1$. "$\Leftarrow$" $[u] = [w][g] = [w]$

$\iff \exists n : u, w \in U^n \tilde{A}$ und $u \sim_h w$ in $U^n \tilde{A}$

"$\Rightarrow$" $u, w, g \in U^n \tilde{A}$, $g \sim 1$ per (g_t). Dann $u \sim_h w$ per $(w g_t)_{t \in [0,1]}$.

"$\Leftarrow$" $\underset{w_1}{u} \sim_h \underset{w_0}{w}$ per (w_t), dann ist $g_t := w^* w_t$ Homotopie mit $g := g_1 \sim_h 1$

Mit $u_1, u_2 \in U^n \tilde{A}$ also

$[u_1][u_2] = [u_1 u_2] = \left[\begin{pmatrix} u_1 u_2 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} u_1 & \\ & u_2 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} u_2 & \\ & u_1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} u_2 u_1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] = [u_2][u_1]$

(s. 3.6)

6.5 Bem.: (a) $U^\infty A = \left\{ \begin{pmatrix} v & \\ & 1 \ddots \end{pmatrix} \mid v \in U^n A \right\}$

(b) $u, w \in U^\infty \tilde{A}$. Dann $[u]=[w] \iff u \sim_h w$ in $U^\infty \tilde{A}$

(Hier: $u \sim_h w$ in $U^n \tilde{A}$, Hier jedoch: $u \sim_h w$ per $u_t \in U^{n_t} \tilde{A}$.
Doch für $0=t_0<t_1<\dots<t_k=1$ mit $\|u_{t_i}-u_{t_{i+1}}\|<2$ ist
$u=u_{t_0} \sim_h u_{t_1} \sim_h \dots \sim_h u_{t_k} = w$ in $U^{\max(n_i)} \tilde{A}$.

(c) K_1 ist ein homotopieinvarianter Funktor, d.h. $\varphi: A \to B$
induziert $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \tilde{B}$ induziert $U^\infty \tilde{A} \to U^\infty \tilde{B}$ induziert $K_1 A \to K_1 B$.

6.6 Satz: Sei A eine C^*-Algebra. Dann $K_0(SA) \cong K_1(A)$

⌈**Bew.:** Es ist $\widetilde{SA} = \{ f: [0,1] \to \tilde{A} \mid f = \lambda 1 + g,\ \lambda \in \mathbb{C},\ g \in SA \}$
$= SA + \mathbb{C}1$

$M_n(\widetilde{SA}) = \{ f: [0,1] \to M_n \tilde{A} \mid f = x + g,\ x \in M_n(\mathbb{C}),\ g \in M_n(SA) \}$

$\exists\, \alpha: K_1 A \to K_0(SA)$, $\beta: K_0(SA) \to K_1 A$ mit $\alpha = \beta^{-1}$.

α: ⌈Sei $u \in U^n \tilde{A}$. Dann $\begin{pmatrix} u & \\ & u^* \end{pmatrix} \sim_h 1$ per (w_t) (s. 3.6)
Dann ist $p: [0,1] \to M_{2n}(\tilde{A})$, $p(t) := w_t \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} w_t^*$ Proj. $\forall t$
mit $p(0)=p(1)=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $p \in M_n(\widetilde{SA})$
⌊ Setze $\alpha([u]) := ([p],[1_n])^\circ \in K_0(SA)$

β: ⌈Sei $([p],[1_n])^\circ \in K_0(SA)$, also $p \in M_m(\widetilde{SA})$ Proj., $p(0)=p(1)=1_n$ (o.E.)
($\sigma(p) \sim 1_n$, also $p(0)=p(1)$ n-dim. Proj., dann abzugleichen)
Also ist $p(0) \sim_h p(1)$ via $(p(t))_{t\in[0,1]}$, d.h. $\exists\, w \in M_m(\widetilde{SA})$ unitär
mit $1_n = p(0) = w\, p(1)\, w^* = w\, 1_n\, w^*$, also $w \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} w$
⌊ $\implies w = \begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix}$. Setze $\beta(([p],[1_n])^\circ) := [u]$

⌊

6.7 Bem.: Damit hat K_1 dieselben funktoriellen Eigenschaften wie K_0.

6.8 Bspe. (a) $K_1(\mathbb{C}) = 0$, denn $U^n(\mathbb{C}) = U^n_0(\mathbb{C})$ (s. 3.5)

(b) $K_1(\mathcal{L}(H)) = 0$, denn für $u \in \mathcal{L}(H^n)$ unitär ist $u = e^{ih}$, h selbstadjungiert nach Funktionalkalkül mit messbaren Funktionen (s. 3.4(a) für den stetigen Fall). Also $u \sim_h 1$.

(c) $K_1(M) = 0$ für jede Von-Neumann-Algebra (da vN-Algebren abgeschlossen unter messb. Fkt.kalkül.)

(d) $0 \to S\mathbb{C} \to C(S^1) \rightleftarrows \mathbb{C} \to 0$ exakt, zerfallend
$f \mapsto f \qquad f \mapsto f(1)$ $\qquad$ ($\varphi(\lambda) := \lambda 1$ konst. Fkt.)

(Identifiziere $(0,1)$ mit $S^1 \setminus \{0\}$)

Also $K_1(C(S^1)) = K_1(S\mathbb{C}) \oplus \underbrace{K_1(\mathbb{C})}_{K_1(\mathbb{C})=0} = \mathbb{Z}$