§7 Bottperiodizität

Wollen nun $K_0(S^2A) \cong K_0(A)$ beweisen, was uns per

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots \to K_0(S^2B) & \to & K_0(SI) & \to & K_0(SA) & \to & K_0(SB) & \to & K_0(I) & \to & K_0(A) & \to & K_0(B) \\
\wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & & & & & \\
K_0(A) & & K_1 I & & K_1 A & & K_1 B & & & & & &
\end{array}$$

die 6-Term-Sequenz für exakte Sequenzen $0 \to I \to A \to B \to 0$ liefert:

$$\begin{tikzcd}
K_0 I \arrow[r] & K_0 A \arrow[r] & K_0 B \arrow[d, "\partial_0"] \\
K_1 B \arrow[u, "\partial_1"] & K_1 A \arrow[l] & K_1 I \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Indexabb. (∂_1) Exponentialabbildung (∂_0)

7.1 Normen auf C*-Algebren: Seien A, B C*-Algebren.

Dann ist $A \odot B$ eine *-Algebra per $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) := x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$ und $(x \otimes y)^* := x^* \otimes y^*$. Die Frage nach einer C*-Norm hierauf ist i.A. sehr kompliziert, denn i.A. gibt es sehr viele:

- Seien $\pi_1 : A \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$, $\pi_2 : B \hookrightarrow \mathcal{L}(K)$ treue Darstellungen.

  $\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\|_{min} := \|\sum \pi_1(a_i) \otimes \pi_2(b_i)\|_{\mathcal{L}(H \otimes K)}$ „minimale/räumliche" Norm (spatial)

  $A \otimes_{min} B := \overline{A \odot B}^{\|\cdot\|_{min}}$ (unabh. von π_1, π_2)

- $\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\|_{max} := \sup\{\|\sum \pi(a_i \otimes b_i)\| \mid \pi : A \odot B \to \mathcal{L}(H) \text{ *-Hom.}\}$ „maximale" Norm

  $A \otimes_{max} B := \overline{A \odot B}^{\|\cdot\|_{max}}$

- Sei $\|\cdot\|_\gamma$ eine C*-Norm auf $A \odot B$. Dann gilt $\|x\|_{min} \leq \|x\|_\gamma \leq \|x\|_{max}$ $\forall x \in A \odot B$

Also $A \otimes_{max} B \twoheadrightarrow A \otimes_\gamma B \twoheadrightarrow A \otimes_{min} B$

Wir sagen, eine C^*-Algebra A ist <u>nuklear</u>, falls die Norm auf $A \odot B$ eindeutig ist, für jede C^*-Algebra B.
Mit anderen Worten: $\|\cdot\|_{min} = \|\cdot\|_{max}$ und $A \otimes_{min} B = A \otimes_{max} B$.

Bsp.:
- A komm. $\Rightarrow$ A nuklear
- A endlichdim. $\Rightarrow$ A nuklear
- $A = \overline{\bigcup_{\to} A_n}$, A_n nukl. $\Rightarrow$ A nuklear
- Also A AF $\Rightarrow$ A nukl., z.B. $\mathcal{K}(H)$ nuklear
- $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt. Dann A nuklear $\Leftrightarrow$ I, B nuklear
  also z.B. $\mathcal{T}$ Toeplitzalgebra nuklear, da $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{T} \to C(S^1) \to 0$

Die Normen $\|\cdot\|_{min}$ und $\|\cdot\|_{max}$ verhalten sich sehr unterschiedlich,
z.B. A, B einfach $\Rightarrow$ $A \otimes_{min} B$ einfach, $A \otimes_{max} B$ i.A. nicht
andererseits $0 \to I \to B \to C \to 0$ exakt

$$\Rightarrow 0 \to A \otimes_{max} I \to A \otimes_{max} B \to A \otimes_{max} C \to 0 \quad \text{exakt}$$

$\leadsto$ $A \otimes_{min} \ldots$ i.A. nicht.

Eine C^*-Algebra A heißt <u>exakt</u>, falls

$$0 \to I \to B \to C \to 0 \text{ exakt} \Rightarrow 0 \to A \otimes_{min} I \to A \otimes_{min} B \to A \otimes_{min} C \to 0 \text{ exakt}$$

Klar: A nuklear $\Rightarrow$ A exakt
Bsp.: $C^*_r(\mathbb{F}_n)$, $n \geq 2$ ist exakt aber nicht nuklear.

Habe also Komplexitätsskala von Nuklearität und Exaktheit (§14?).
Fazit für uns hier: Ist A eine beliebige C^*-Algebra,
so ist $0 \to \mathcal{K} \otimes A \to \mathcal{T} \otimes A \to C(S^1) \otimes A \to 0$ exakt

[Bew: $A \otimes_{max} (\cdot)$ ist ein exakter Funktor und $\mathcal{K}, \mathcal{T}, C(S^1)$ sind nuklear

Fahrplan für Beweis der 6-Term-Sequenz:

- $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{J} \to C(S^1) \to 0$ exakt

  $\Rightarrow 0 \to \mathcal{K}\otimes A \to \mathcal{J}\otimes A \to C(S^1)\otimes A \to 0$ exakt $\forall A$

- $j: \mathbb{C} \to \mathcal{J}$, $\lambda \mapsto \lambda\cdot 1$, $\quad k: \mathcal{J} \to \mathbb{C}$, $v \mapsto 1$ zueinander invers in K-Theorie

  bzw. $j\otimes id_A: A \to \mathcal{J}\otimes A$, $a \mapsto 1\otimes a$, $\quad k\otimes id_A: \mathcal{J}\otimes A \to A$, $v\otimes a \mapsto a$ $\quad \Rightarrow K_0(A) \cong K_0(\mathcal{J}\otimes A)$

Bew: Finde C^*-Algebra E und $\psi_0, \psi_1: \mathcal{J} \to E$ so dass

(a) $\psi_0 = \psi + \omega$, $\psi_1 = \psi + \omega\circ j\circ k$

(b) $\psi_0 \sim_h \psi_1$

(c) $K_0(\omega)$ injektiv.

Dann $K_0(\psi) + K_0(\omega) = K_0(\psi) + K_0(\omega)K_0(j\circ k) \Rightarrow K_0(j)K_0(k) = id_{K_0(\mathcal{J})}$

(sowieso: $K_0(k)K_0(j) = id_{K_0(\mathbb{C})}$)

Tensorieren mit id_A liefert $K_0(A) \cong K_0(\mathcal{J}\otimes A)$

- Habe eine zerfallende Folge

$$0 \to \hat{C}A \to \mathcal{J}\otimes A \underset{k\otimes id_A}{\overset{j\otimes id_A}{\rightleftarrows}} A \to 0, \qquad \hat{C}A = \ker(k\otimes id_A)$$

  $\Rightarrow K_0(A) \cong K_0(\mathcal{J}\otimes A) = K_0(\hat{C}A) \oplus K_0(A)$, also $K_0(\hat{C}A) = 0$

- $0 \to \mathcal{K}\otimes A \to \hat{C}A \to SA \to 0$ ist exakt

  $\Rightarrow \underbrace{K_0(S\hat{C}A)}_{=0} \to K_0(S^2A) \to \underbrace{K_0(\mathcal{K}\otimes A)}_{=K_0(A)} \to \underbrace{K_0(\hat{C}A)}_{=0} \to K_0(SA)$ exakt

  $\Rightarrow K_0(S^2A) = K_0(A)$

- $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt.

  $\Rightarrow \underbrace{K_0S^2I}_{=K_0I} \to \underbrace{K_0S^2A}_{=K_0A} \to \underbrace{K_0S^2B}_{=K_0B} \to \underbrace{K_0SI}_{=K_1I} \to \underbrace{K_0SA}_{=K_1A} \to \underbrace{K_0SB}_{=K_1B} \to K_0I \to K_0A \to K_0B$

7.2 Satz: Betrachte $j: \mathbb{C} \to J$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1$, $k: J \to \mathbb{C}$, $v \mapsto 1$

(Erinnerung: $J = C^*(v \text{ Isometrie})$ Toeplitzalgebra)

bzw. $j \otimes id_A : A \to J \otimes A$, $a \mapsto 1 \otimes a$, $k \otimes id_A : J \otimes A \to A$, $v \otimes a \mapsto a$

(a) $K_0(j)$ und $K_0(k)$ sind zueinander invers, also $K(\mathbb{C}) \cong K(J)$

(b) $K(j \otimes id_A)$ und $K(k \otimes id_A)$ sind zueinander invers, also $K(A) \cong K(J \otimes A)$

Bew: (b) wie (a), nur alle Homomorphismen mit id_A tensorieren.

(a) $K_0(k) \circ K_0(j) = K_0(k \circ j) = K(id_{\mathbb{C}}) = id_{K(\mathbb{C})}$. Bzz.: $K(j) \circ K(k) = id_{K(J)}$

Setze $\hat{T} := C^*(\underbrace{v \otimes 1}_{=:\tilde{v}}, \underbrace{(1-vv^*) \otimes v}_{=:\tilde{w}}) = C^*(\mathcal{K} \otimes J, J \otimes 1) \subseteq J \otimes J$

$\ulcorner$ Erinnerung: $\mathcal{K} \cong \overline{\text{span}}\{v^k(1-vv^*)v^{*\ell} \mid k, \ell \in \mathbb{N}_0\} \subseteq J$

Somit ist $\tilde{v}, \tilde{w} \in C^*(\mathcal{K} \otimes J, J \otimes 1)$ und umgekehrt ist

$J \otimes 1 = C^*(\tilde{v}) \subseteq C^*(\tilde{v}, \tilde{w})$ und $\mathcal{K} \otimes J \subseteq C^*(\tilde{v}, \tilde{w})$

per $\mathcal{K} \otimes J \cong \overline{\text{span}}\{v^k(1-vv^*)v^{*\ell} \otimes x \mid k, \ell \in \mathbb{N}_0, x \in J\} \subseteq C^*(\tilde{v}, \tilde{w})$

$\lrcorner$ $(C^*(\tilde{w}) = (1-vv^*) \otimes J$ erzeugt $(1-vv^*) \otimes x$ $\forall x \in J$, dann $\tilde{v}^k(\ldots)\tilde{v}^{*\ell})$

Es gilt sogar $\mathcal{K} \otimes J \lhd \hat{T}$.

[[Mit $\mathcal{K} \otimes J \cong \overline{\text{span}}\{\ldots\}$ und $\tilde{v}^{(*)} \overline{\text{span}}\{\ldots\} \subseteq \overline{\text{span}}\{\ldots\}$, $\tilde{w}^{(*)} \overline{\text{span}}\{\ldots\} \subseteq \overline{\text{span}}\{\ldots\} \ldots$

Also ex. $\pi: \hat{T} \to \hat{T}/\mathcal{K} \otimes J \cong \mathcal{C}(S^1)$ mit $\ker \pi = \mathcal{K} \otimes J$

und $\pi(\tilde{w}) = 0$, $\pi(\tilde{v}) = u$.

$\ulcorner$ $0 \to \mathcal{K} \to J \to \mathcal{C}(S^1) \to 0$ ist exakt, also auch

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathcal{K} \otimes J & \to & J \otimes J & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathcal{C}(S^1) \otimes J & \to 0 \\ & \| & \circlearrowleft & \cup\!\| & & & \\ & \mathcal{K} \otimes J & \to & \hat{T} & & & \end{array}$$

mit $\tilde{\pi}(v \otimes 1) = u \otimes 1$ und $\tilde{\pi}((1-vv^*) \otimes 1) = 0$

Da nun $\tilde{\pi}(\hat{T}) = C^*(\tilde{\pi}(\tilde{v}), \tilde{\pi}(\tilde{w})) = C^*(u \otimes 1) \cong \mathcal{C}(S^1)$ ist,

$\lrcorner$ ist $\pi := \tilde{\pi}|_{\hat{T}} : \hat{T} \to \mathcal{C}(S^1)$

Setze $E := \{(x,y) \mid \pi(x) = \tau(y)\} \subseteq \hat{T} \oplus J$ C^*-Unteralgebra,

wobei $\tau : J \longrightarrow \mathcal{C}(S^1)$, $v \longmapsto u$. Also Pullback

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \hat{T} \arrow[d, "\pi"] \\ J \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{C}(S^1) \end{tikzcd}$$

Dann ist

$$0 \longrightarrow K \otimes J \longrightarrow E \underset{\sigma}{\overset{}{\rightleftarrows}} J \longrightarrow 0 \quad \text{zerfallend}$$

$$x \longmapsto (x,0), \qquad (x,y) \overset{\sigma}{\longmapsto} y, \qquad (\tilde{v},v) \longleftarrow\!\shortmid\, v$$

Π Die Abbildung $\sigma : E \longrightarrow J$, $(x,y) \longmapsto y$ ist surjektiv, da $(\tilde{v},v) \in E$ ist

(denn $\pi(\tilde{v}) = u = \tau(v)$.) Andererseits ist $(\tilde{v},v)$ eine Isometrie,

also ex. $J \overset{\alpha}{\longrightarrow} E$, $v \longmapsto (\tilde{v},v)$ und ist ein Split ($\sigma \circ \alpha = id_J$)

Der Kern der Abbildung σ ist $K \otimes J$, denn für $(x,y) \in E$ ist

$y = \sigma(x,y) = 0 \iff y = 0$ und $\pi(x) = 0 \iff y = 0$ und $x \in K \otimes J$

$\perp$

Somit ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K(K \otimes J) \arrow[r] & K(E) \arrow[r, shift left] & K(J) \arrow[l, shift left] \arrow[r] & 0 \\ & K_0(J) \arrow[u] \arrow[ur, "K(\omega)"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft", near end, xshift=3ex] & & & \end{tikzcd} \quad \text{zerfallend}$$

mit $\omega : J \longrightarrow E$, $v \longmapsto (\tilde{w},0)$ (überprüfe $\pi(\tilde{w}) = 0 = \tau(0)$)

und

$$\begin{tikzcd} K \otimes J \arrow[r, "\gamma"] & E \\ J \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\omega"'] & \end{tikzcd} \qquad \tilde{w} \updownarrow v$$

($\tilde{w} = (1 - vv^*) \otimes v$ ist eine Isometrie in $C^*(\tilde{w}) \subseteq K \otimes J$)

Daher ist $K(\omega)$ injektiv.

Π Die Abbildung β ist ein Isomorphismus in K-Theorie, $K(\gamma)$ ist inj.

(nach 4.5(b): Für $\iota : A \longrightarrow A \otimes K$, $x \longmapsto x \otimes e$ minimale Proj. ist $K(\iota) : A \longrightarrow A \otimes K$ ein Isomorphismus)

$\perp$

Betrachte $\psi_0 : J \longrightarrow E$, $\quad v \longmapsto (\tilde v \tilde v \tilde v^* + \tilde w, v)$

$\psi_1 : J \longrightarrow E$, $\quad v \longmapsto (\tilde v \tilde v \tilde v^* + (1-\tilde v \tilde v^*), v)$ $\qquad (1 \mathrel{\hat=} 1\otimes 1)$

wohldef: $\pi(\tilde v\tilde v\tilde v^*) = uuu^* = u = \tau(v)$, $\pi(\tilde w) = \pi(1-\tilde v\tilde v^*) = 0$

und $(\tilde v\tilde v\tilde v^* + \tilde w)^*(\tilde v\tilde v\tilde v^* + \tilde w) = \tilde v\tilde v^* + \tilde w^*\tilde w = vv^*\otimes 1 + (1-vv^*)\otimes 1 = 1\otimes 1$

$(\tilde v\tilde v\tilde v^* + (1-\tilde v\tilde v^*))^*(\tilde v\tilde v\tilde v^* + (1-\tilde v\tilde v^*)) = \tilde v\tilde v^* + (1-\tilde v\tilde v^*) = 1 \ (= 1\otimes 1)$

Es ist $\psi_0 = \psi + w$, $\quad \psi_1 = \psi + w\circ j\circ k$ $\quad$ für $\psi : J \longrightarrow E$, $v \longmapsto (\tilde v\tilde v\tilde v^*, v)$

$(\psi + w)(v) = (\tilde v\tilde v\tilde v^*, v) + (\tilde w, 0) = \psi_0(v)$,

$(\psi + w\circ j\circ k)(v) = (\tilde v\tilde v\tilde v^*, v) + w(1) = \psi_1(v)$, da $w(1) = (1-vv^*)\otimes 1 = (1-\tilde v\tilde v^*)$

Beachte: $\psi\cdot w = w\cdot \psi = 0$, also orthogonale Bilder, d.h. $\psi + w$ ist $*$-Hom.

bzw.: $\psi_0 \sim_h \psi_1$ $\left(\text{dann } K_0(\psi) + K_0(w) = K_0(\psi) + K_0(w)K_0(j)K_0(k) \ \overset{K_0(w) \text{ inj.}}{\Longrightarrow} \ K_0(j)K_0(k) = \mathrm{id}_{K_0(J)}\right)$

Betrachte $\tilde v := v\otimes 1$, $\quad \tilde w := (1-vv^*)\otimes v$, $\quad \tilde g := (1-vv^*)\otimes(1-vv^*) \in \hat T$

Dann gilt $\tilde w^*\tilde v = \tilde w\tilde v = \tilde v^*\tilde w = \tilde v^*\tilde w^* = 0$, $\quad \tilde v^*\tilde g = \tilde g\tilde v = \tilde w^*\tilde g = \tilde g\tilde w = 0$.

Setze $z_0 := \tilde v\tilde v\tilde v^*\tilde v^* + \tilde w\tilde v^* + \tilde v\tilde w^* + \tilde g$

$z_1 := \tilde v\tilde v\tilde v^*\tilde v^* + (1-\tilde v\tilde v^*)\tilde v^* + \tilde v(1-\tilde v\tilde v^*)$ $\qquad (1 \mathrel{\hat=} 1\otimes 1)$

Dann sind $z_i = z_i^*$, $z_i^2 = 1\otimes 1$ für $i = 0,1$

$z_0^2 = \tilde v\tilde v\tilde v^*\tilde v^* + \tilde w\tilde w^* + \tilde v\tilde w^*\tilde w\tilde v^* + \tilde g = vvv^*v^*\otimes 1 + (1-vv^*)\otimes vv^* + v(1-vv^*)v^*\otimes 1 + (1-vv^*)\otimes(1-vv^*)$
$= 1\otimes 1$

$z_1^2 = \tilde v\tilde v\tilde v^*\tilde v^* + (1-\tilde v\tilde v^*) + \tilde v(1-\tilde v\tilde v^*)\tilde v^* = 1 \ (= 1\otimes 1)$

Also sind z_i Unitäre mit $\mathrm{Sp}\, z_i \neq S^1$, d.h. $z_0 \sim_h 1 \sim_h z_1$ per $(z_t)_{t\in[0,1]}$

Setze $\psi_t : J \longrightarrow E$, $v \longmapsto (v_t, v)$ mit $v_t := z_t \tilde v^2$, also $\psi_{t=0} = \psi_0$, $\psi_{t=1} = \psi_1$

7.3 Korollar (Bottperiodizität): $\quad K_0(S^2A) \cong K_0(A)$

Bew: Habe eine zerfallende Folge.

$$0 \to \hat{C}A \to J\otimes A \underset{k\otimes id_A}{\overset{j\otimes id_A}{\rightleftarrows}} A \to 0 \quad , \quad \hat{C}A := \mathrm{Kern}(k\otimes id_A)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{7.2\,\cong \\ K_0(A)}}{K_0(J\otimes A)} = K_0(\hat{C}A) \oplus K_0(A) \quad \Rightarrow \quad K_0(\hat{C}A) = 0 .$$

Die Folge $0 \to \mathcal{K}\otimes A \to \hat{C}A \to SA \to 0$ ist exakt

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & A \arrow[u] \arrow[r, equal] & A \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}\otimes A \arrow[r] & J\otimes A \arrow[u, "k\otimes id_A"] \arrow[r, "\tau\otimes id_A"] \arrow[ur, phantom, "\text{①}\circlearrowright"] & C(S^1)\otimes A \arrow[u, "ev_1\otimes id_A"'] \arrow[r] & 0 \\
 & & \hat{C}A \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, phantom, "\text{②}\circlearrowright"] & C(S^1\setminus\{1\})\otimes A \arrow[u, "\delta"'] \arrow[r, "\text{③}"] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$\left(\tau : J \to C(S^1),\ v \mapsto u\right)$

①$\circlearrowright$: $(ev_1\otimes id_A)(\tau\otimes id_A)(v\otimes a) = (ev_1\otimes id_A)(u\otimes a) = a = k\otimes id_A(v\otimes a)$

②$\circlearrowright$: Sei $x\in\hat{C}A$. Dann ist $\tau\otimes id_A(x) \in C(S^1)\otimes A$ mit
$(ev_1\otimes id_A)(\tau\otimes id_A)(x) = k\otimes id_A(x) = 0$, d.h. $\tau\otimes id_A(x) \in \mathrm{Ker}(ev_1\otimes id_A)$
$\Rightarrow \exists!\, y \in C(S^1\setminus\{1\})\otimes A$ mit $\delta(y) = \tau\otimes id_A(x)$
Somit ex. $\gamma : \hat{C}A \to C(S^1\setminus\{1\})\otimes A,\ x \mapsto y$, denn y ist eind. (δ inj.)

③: γ ist surj., denn zu $y \in C(S^1\setminus\{1\})\otimes A$ ex. $x \in J\otimes A$ mit
$\tau\otimes id_A(x) = \delta(y)$, da $\tau\otimes id_A$ surj.
Aber $k\otimes id_A(x) = (ev_1\otimes id_A)(\tau\otimes id_A)(x) = (ev_1\otimes id_A)(\delta(y)) = 0$
$\Rightarrow x \in \hat{C}A$ und $\gamma(x) = y$

④: Sei $x\in\hat{C}A$. Dann $x \in \mathrm{Kern}\,\gamma \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,\tau\otimes id_A$ (δ inj.)
$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\gamma = \mathcal{K}\otimes A$

Somit gilt nach Prop. 5.11:

$$K_0(S\hat{C}A) \to K_0(S^2A) \to K_0(\mathcal{K}\otimes A) \to K_0(\hat{C}A) \to K_0(SA) \quad \text{exakt}$$

$$K_0(S\hat{C}A) = 0, \quad K_0(\mathcal{K}\otimes A) = K_0(A), \quad K_0(\hat{C}A) = 0$$

$\ulcorner$ $S\hat{C}A = C_0(0,1)\otimes \hat{C}\mathbb{C}\otimes A = \hat{C}(SA)$ also $K_0(\hat{C}(SA)) = 0$

oder:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{C}(SA) \arrow[r] & J\otimes(SA) \arrow[r] & SA \arrow[r] & 0 & \text{exakt} \\
0 \arrow[r] & S(\hat{C}A) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\eta"] & S(J\otimes A) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & SA \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 & \text{exakt}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ eine Abbildung η ex. und ist ein Isomorphismus

$\Rightarrow K_0(S^2A) \cong K_0(A)$ $\llcorner$

7.4 Korollar: Sei $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt.

Dann ist

$$\begin{tikzcd}
K_0 I \arrow[r] & K_0 A \arrow[r] & K_0 B \arrow[d, "\partial_0"] \\
K_1 B \arrow[u, "\partial_1"] & K_1 A \arrow[l] & K_1 I \arrow[l]
\end{tikzcd} \quad \text{exakt}$$

„Indexabbildung" ∂_1, ∂_0 „Exponentialabbildung"

$\ulcorner$ Bew: $K_0S^2I \to \underset{\substack{\cong 7.3\\ K_0A}}{K_0S^2A} \to \underset{\substack{\cong 7.3\\ K_0B}}{K_0S^2B} \to \underset{\substack{\cong 6.6\\ K_1I}}{K_0SI} \to \underset{\substack{\cong 6.6\\ K_1A}}{K_0SA} \to \underset{\substack{\cong 6.6\\ K_1B}}{K_0SB} \to K_0I \to K_0A \to K_0B$ exakt (5.11)

$\llcorner$

7.5 Bem.: Die „6-Term-Sequenz" ist natürlich, d.h.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
K_0B \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0B' \arrow[d, "\partial_0'"] \\
K_1I \arrow[r] & K_1I'
\end{tikzcd},
\begin{tikzcd}
K_0I \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0I' \\
K_1B \arrow[r] \arrow[u, "\partial_1"] & K_1B' \arrow[u, "\partial_1'"']
\end{tikzcd}$$

7.6 Bsp.: $K_1 C(S^1) = \mathbb{Z}$

$\ulcorner$ Bew: wie in 6.8(d) ist

$$0 \to S\mathbb{C} \to C(S^1) \rightleftarrows \mathbb{C} \to 0 \quad \text{zerfallend}$$

$\lambda 1 \mapsfrom \lambda$; $f \mapsto f$; $f \mapsto f(1)$

$\Rightarrow K_i\, C(S^1) = K_i(S\mathbb{C}) \oplus K_i(\mathbb{C}) \qquad i = 0,1$

$K_i(S\mathbb{C}) = K_{i+1}(\mathbb{C})$

$i=0$: $K_0SA = K_1A$ nach 6.6

$i=1$: $K_1SA \underset{6.6}{=} K_0S^2A \underset{7.3}{=} K_0A$

$\Rightarrow K_0(C(S^1)) = \mathbb{Z}$, $K_1 C(S^1) = \mathbb{Z}$

$\llcorner$

7.7 Prop. (Beschreibung der Randabbildungen): $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt

(a) Sei $u \in M_k \tilde{B}$ unitär und $v \in M_k \tilde{A}$ eine Isometrie mit $\pi(v) = u$.
Dann ist $\partial_1([u]) = [1 - vv^*] \in K_0 I$ „Index von u"

(b) Sei $p \in M_k \tilde{B}$ Projektion und $h \in M_k \tilde{A}$ s.a. mit $\pi(h) = p$.
Dann ist $\partial_0([p]) = [e^{2\pi i h}] \in K_1 I$

⌈Bew.: (a) Betrachte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d] & C(S^1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & \tilde{A} \arrow[r] & \tilde{B} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$v_0 \longmapsto u_0$, $v_0 \mapsto v$, $u_0 \mapsto u$

Aufgrund der Natürlichkeit gilt:

$$\begin{tikzcd} K_0 \mathcal{K} \arrow[r] & K_0 I \\ K_1 C(S^1) \arrow[u, "\partial_1"] \arrow[r] & K_1 B \arrow[u, "\partial_1"'] \end{tikzcd}$$

$[u] \mapsto [1-vv^*]$

$$\mathbb{Z} = K_0 \mathbb{C} \qquad \overset{7.2}{=} \mathbb{Z}$$

Hierbei

$$\begin{tikzcd} K_0 \mathcal{K} \arrow[r] & K_0 \mathcal{J} \arrow[r] & K_0 C(S^1) = \mathbb{Z} \arrow[d] \\ K_1 C(S^1) \arrow[u] & K_1 \mathcal{J} \arrow[l] & K_1 \mathcal{K} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$K_0 \mathcal{J} \overset{7.2}{=} K_0 \mathbb{C} = \mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{Z} = K_1 C(S^1)$, $\quad K_1 \mathcal{J} = K_0(\mathcal{J} \otimes S) \overset{7.2}{=} K_0 S = K_1 \mathbb{C} = 0$, $\quad K_1 \mathcal{K} \overset{4.5(b)}{=} K_1 \mathbb{C} = 0$

⌈Wie in 3.19(d) lässt sich zeigen, dass $j : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{K}$, $\lambda \mapsto \lambda e$
ein Isomorphismus in K-Theorie ist, wobei e eine
minimale Proj. in $\mathcal{K}$ ist, z.B. $1 - vv^*$ (für $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$)⌋

Der Erzeuger $[1]$ von $\underbrace{K_0 \mathbb{C}}_{\cong \mathbb{Z}}$ entspricht $K_0(j)[1] = [1] \in K_0 \mathcal{J} = \mathbb{Z}$

und $K_0 C(S^1) = \mathbb{Z}$ wird erzeugt von $[1]$ wg. $0 \to S\mathbb{C} \to C(S^1) \rightleftarrows \mathbb{C} \to 0$, $f \longmapsto f(1)$

Also ist $K_0 \mathcal{J} \xrightarrow{\cong} K_0 C(S^1)$ ein Isomorphismus und daher auch
$\underset{\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel}{K_1 C(S^1)}} \to K_0 \mathcal{K} = \mathbb{Z}$. Der Erzeuger von $K_1 C(S^1)$ ist $[u]$ und
der von $K_0 \mathcal{K}$ ist $[1 - vv^*]$.

(b) ähnl. (mit $0 \to S \to C \to \mathbb{C} \longrightarrow 0$) ⌋

7.8 Bem: Der Name „Indexabbildung" ist sinnvoll:

(a) Sei H ein unendl.dimensionaler sep. Hilbertraum.

$T \in \mathcal{L}(H)$ heißt Fredholmoperator, falls Bild T abgeschlossen und $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$, $\dim \operatorname{Ker} T^* < \infty$. Definiere dann $\operatorname{ind}(T) := \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^* \in \mathbb{Z}$

Betrachte $\operatorname{Tr} : \mathcal{L}(H) \to \mathbb{C}$, $T \mapsto \sum_{n \geq 1} (Te_n \mid e_n)$, (e_n) ONB (unbeschränkte) Spur. Dann $\operatorname{Tr}(p) = \dim (pH)$ $\forall p \in \mathcal{L}(H)$ Proj.

$\operatorname{Tr}(T) < \infty \iff T \in \mathcal{K}(H)$ und $\sum_{n \geq 1} \lambda_n < \infty$ ← nicht triviale Eigenwerte von $|T|$ mit Multiplizität und $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$

(dann $\operatorname{Tr}(T) = \sum \lambda_n$)

Also $\operatorname{Tr}(p) < \infty$ $\forall p \in \mathcal{K}(H)$ Proj.

Dann ist $K_0(\operatorname{Tr}) : K_0(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ ein Isom.

mit $K_0(\operatorname{Tr})([p]) = \operatorname{Tr}(p)$ $\forall p \in \mathcal{K}$ Proj.

Betrachte $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{L}(H) \xrightarrow{\pi} Q(H) \to 0$

Für $T \in \mathcal{L}(H)$ Fredholm gilt $\operatorname{ind} T = (K_0(\operatorname{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(T)])$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} & & \\
K_0(\mathcal{K}) \arrow[u, "K_0(\operatorname{Tr})"] \arrow[r] & K_0(\mathcal{L}(H)) \arrow[r] & K_0(Q(H)) \arrow[d] \\
K_1(Q(H)) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(\mathcal{L}(H)) \arrow[l] & K_1(\mathcal{K}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

T Fredholm $\overset{\text{Atkinson}}{\Longrightarrow}$ $\pi(T) \in Q(H)$ invertierbar

und Bem. 3.7. $GL(A) \to U(A)$

(b) Betrachte $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{J} \to C(S^1) \to 0$.

Also

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = K_0(\mathcal{K}) \arrow[r, "0"] & K_0 \mathcal{J} = \mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] & K_0 C(S^1) = \mathbb{Z} \arrow[d] \\
K_1 C(S^1) \arrow[u, "\partial_1", "\cong"'] & K_1 \mathcal{J} \arrow[l] & K_1 \mathcal{K} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$K_1 C(S^1) = \mathbb{Z}$, $K_1 \mathcal{J} = 0$, $K_1 \mathcal{K} = 0$

Der Erzeuger $[u]$ von $K_1(C(S^1))$ wird auf den Erzeuger $[1-w^{\#}]$ von $K_0(\mathcal{K})$ geschickt. Andererseits $u \mapsto id \in C(S^1)$

D.h. $K_1(C(S^1)) \xrightarrow[\partial_1]{\cong} \mathbb{Z}$ ist $f \mapsto \mathrm{wind}(f)$

Umdrehungszahl um 0

$$K_1(C(S^1)) = \frac{U^\infty(C(S^1))}{U_0^\infty(C(S^1))}$$

Also ist ∂_1 die Abbildung der Umdrehungszahl.