§8 Beispiele und die Pimsner-Voiculescu-Sequenz

8.1 Bspl.: Erinnerung: Die Cuntzalgebra ist die universelle

C*-Algebra $\mathcal{O}_n := C^*(\underbrace{S_1,\dots,S_n}_{\text{Isometrien}} \mid \sum_{i=1}^{n} S_iS_i^* = 1)$, $2\le n<\infty$

Setze $\mathcal{E}_n := C^*(S_1,\dots,S_n \text{ Isometrien} \mid S_i^*S_j = \delta_{ij})$ $2\le n<\infty$

Dann ist $0\to\mathcal{K}\to\mathcal{E}_n\to\mathcal{O}_n\to 0$ exakt.

⌜ In $\mathcal{O}_n$ gilt $S_i^*S_j=\delta_{ij}$ $\left(S_i^*(S_iS_i^*+S_jS_j^*)S_i \le S_i^*S_i = 1 \Rightarrow (S_i^*S_j)(S_i^*S_j)^*\le 0\right)$

Also ex. $\mathcal{E}_n\to\mathcal{O}_n$, $S_i\mapsto S_i$ mit Kern $\langle 1-\sum_{i=1}^n S_iS_i^*\rangle \cong \mathcal{K}$

$= \operatorname{span}\{ S_\mu(1-\sum_{i=1}^n S_iS_i^*)S_\nu^* \mid \mu,\nu \text{ Multiindizes}\}$

⌞

Was ist $K_i(\mathcal{O}_n)$? Mehrfache Anwendung der Bottperiodizität.

Da $S_iS_i^*$ Murray-von-Neumann-äquivalent zu 1 ist (per S_i),

ist $[S_iS_i^*]=[1]$. Also $[1]=[\sum_{i=1}^n S_iS_i^*] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{alle Proj. orth.}}}{=} \sum_{i=1}^n [S_iS_i^*] = n[1]$.

Vermute also $K_0(\mathcal{O}_n)=\frac{\mathbb{Z}}{(n-1)\mathbb{Z}}$.

Kann zeigen: $(n-1)x=0 \quad \forall x\in K_i\mathcal{O}_n$, $i=0,1$.

Betrachte

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathbb{Z}}{K_0\mathcal{K}} \arrow[r] & K_0\mathcal{E}_n \arrow[r, two heads, "q_*"] & K_0\mathcal{O}_n \arrow[d] \\ K_1\mathcal{O}_n \arrow[u, "0"] & K_1\mathcal{E}_n \arrow[l, hook'] & \underset{0}{K_1\mathcal{K}} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(denn $K_1\mathcal{O}_n$ hat Torsion) $\longrightarrow 0$

$\Rightarrow \quad 0\to \underset{\mathbb{Z}}{K_0\mathcal{K}} \to K_0\mathcal{E}_n \to K_0\mathcal{O}_n \to 0$ exakt

und $K_1\mathcal{O}_n \cong K_1\mathcal{E}_n$.

Es gilt $K_0 \mathcal{O}_n = \mathbb{Z}[1]$.

⌈ Klar: „$\supseteq$". „$\subseteq$" Sei $r := [1 - \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^*] \in K_0 \mathcal{E}_n$, also $K_0 \underset{\langle 1-\sum S_iS_i^*\rangle}{\underset{\cong}{\mathcal{K}}} = \mathbb{Z}\cdot r$.

Sei $x \in K_0\mathcal{E}_n$. Dann ist $(n-1)\, q_*(x) = 0$, also $(n-1)x \in \ker q_* = \mathbb{Z} r$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \quad nx = x + kr$.

Außerdem gilt $r = [1] - n[1]$ in $K_0\mathcal{E}_n$, also $nk[1] = k[1] - kr$, d.h.

$n(x+k[1]) = x + kr + k[1] - kr = (x+k[1])$.

Man kann zeigen, dass $[p] \neq n[p]$ in $K_0\mathcal{E}_n$ $\forall p \in \mathcal{E}_n$ Proj. mit $q_*([p]) \neq 0$.

Also gilt $q_*(x+k[1]) = 0$, d.h. $q_*(x) = -k[1]$ in $K_0\mathcal{O}_n$.

⌊ Da q_* surjektiv ist, ist also $K_0\mathcal{O}_n \subseteq \mathbb{Z}[1]$.

Es gilt $k[1] = 0$ in $K_0\mathcal{O}_n$ für $k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $k = 0 \mod (n-1)$.

⌈ „$\Leftarrow$" $(n-1)k'[1] = 0$ in $K_0\mathcal{O}_n$. „$\Rightarrow$" $k[1]=0$ in $K_0\mathcal{O}_n \Rightarrow q_*(k[1]) = 0$,

also $k[1] \in \ker q_*$ in $K_0\mathcal{E}_n$, d.h. $k[1] = jr$ für ein $j \in \mathbb{Z}$ (in $K_0\mathcal{E}_n$).

$\Rightarrow \quad k([1]-r) = nk[1] = njr \overset{k[1]=jr}{\Longrightarrow} (k+(n-1)j)r = 0$ in $K_0\mathcal{E}_n$

Aber $\ell r \neq 0$ $\forall \ell \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ in $K_0\mathcal{E}_n$, da $\underset{\mathbb{Z}r}{\underset{\|}{K_0\mathcal{K}}} \hookrightarrow K_0\mathcal{E}_n$.

⌊ $\Rightarrow$ $k+(n-1)j = 0$, d.h. $k = 0 \mod (n-1)$.

Also $K_0\mathcal{O}_n = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$. Und $K_1\mathcal{O}_n = 0$.

Dies zeigt auch $\mathcal{O}_n \not\cong \mathcal{O}_m$ falls $n\neq m$.

8.2 <u>Erinnerung:</u> Sei A eine unitale C^*-Algebra, $\alpha : A \xrightarrow{\cong} A$ ein Automorphismus. Dann ist $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = C^*(a\in A,\ u \text{ unitär} \mid \alpha(a) = uau^*)$.

Bsp.: $A = C(S^1) = C^*(v \text{ unitär})$, $\alpha_\vartheta(v) := e^{2\pi i\vartheta} v$, $\vartheta\in\mathbb{R}$.

Dann $C(S^1)\rtimes_\vartheta \mathbb{Z} = C^*(u,v \text{ unitär} \mid e^{2\pi i \vartheta} v = uvu^*) = A_\vartheta$.

8.3 Satz (Pimsner-Voiculescu): Die Sequenz

$$\begin{tikzcd} K_0 A \arrow[r, "\mathrm{id}_{K_0} - \alpha_*^{-1}"] & K_0 A \arrow[r] & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1 A \arrow[l] & K_1 A \arrow[l, "\mathrm{id}_{K_1} - \alpha_*^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

ist exakt.

Bew: $J(A,\alpha) := C^*(a \otimes 1, u \otimes v) \subseteq (A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{T}$.

(Also eine AA „$A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$" wobei das Unitäre u durch eine Isometrie v ersetzt wird.)

Dann ist $0 \to A \otimes \mathcal{K} \to J(A,\alpha) \to A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \to 0$ exakt.

Erinnerung: $\mathcal{K} = C^*(e_{ij},\ i,j \in \mathbb{N}_0 \mid e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il},\ e_{ij}^* = e_{ji}) \ldots$

Andererseits $\mathcal{K} \cong \overline{\mathrm{span}}\{v^i(1-vv^*)v^{*j} \mid i,j \in \mathbb{N}_0\} = \langle 1 - vv^* \rangle \lhd \mathcal{T}$.

Die Abb. $A \otimes \mathcal{K} \to J(A,\alpha)$, $a \otimes e_{ij} \mapsto (u\otimes v)^i (a \otimes (1-vv^*))(u \otimes v)^{*j}$ existiert, ist injektiv und bildet $A \otimes \mathcal{K}$ isomorph auf $\langle (1 \otimes (1-vv^*)) \rangle \lhd J(A,\alpha)$ ab. Der Quotient ist $C^*(a \otimes 1, u \otimes u') \subseteq (A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C(S^1)$, was isomorph zu $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ ist.

Dann

$$\begin{tikzcd} K_0 A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0 A \arrow[d] \arrow[dr] & \\ K_0(A \otimes \mathcal{K}) \arrow[r] & K_0(J(A,\alpha)) \arrow[r] & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1(J(A,\alpha)) \arrow[l] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_1(A \otimes \mathcal{K}) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] \\ & K_1(A) \arrow[ul, "i_*"] \arrow[u, "d_*"] & K_1(A) \arrow[l, "\mathrm{id}_{K_1} - \alpha_*^{-1}"] \end{tikzcd}$$

exakt

wobei

$$\begin{tikzcd} A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & J(A,\alpha) \arrow[l] \\ & A \arrow[ul, "i"] \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd} \qquad a \mapsfrom a \mapsto a \otimes 1$$

und d_* injektiv.

$\rightsquigarrow$ d_* ist ein Iso.

$\rightsquigarrow$ gilt auch für K_0.

8.4 Bsp.: Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ und $A_\vartheta = C(S^1) \rtimes_{\vartheta} \mathbb{Z}$ ist

$\alpha_* = \mathrm{id}_*$, denn $K_1(\alpha)[u] = [u]$ und $K_1(\alpha)[v] = [\alpha(v)] = [v]$.

$$e^{2\pi i \vartheta} v \sim_h v$$

Ebenso $K_0(\alpha) = \mathrm{id}_*$, also

$$\begin{tikzcd}
K_0\, C(S^1) \cong \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & K_0\, C(S^1) \cong \mathbb{Z} \arrow[r] & K_0\, A_\vartheta \arrow[d] \\
K_1\, A_\vartheta \arrow[u] & K_1\, C(S^1) \cong \mathbb{Z} \arrow[l] & K_1\, C(S^1) \cong \mathbb{Z} \arrow[l, "0"]
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to \underbrace{K_i\, C(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}} \to K_i\, A_\vartheta \to \underbrace{K_{i+1}\, C(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}} \to 0 \quad \text{exakt}$$

$$\Rightarrow \quad K_i\, A_\vartheta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2.$$

Abhängigkeit von ϑ?

Haben in C^*-Alg. I gesehen, dass eine Spur $\tau : A_\vartheta \to \mathbb{C}$ ex. mit $\tau\big(\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} a_{kl} u^k v^l\big) = a_{00}$. Also $\tau(1) = 1$.

Rieffel konstruierte eine Projektion $p \in A_\vartheta$ mit $\tau(p) = \vartheta$ für $\vartheta \in (0,1)$ irrational.

Die Spur ergibt einen „<u>Ordnungsisomorphismus</u>" $K_0(\tau) : K_0 A_\vartheta \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} + \vartheta\mathbb{Z}$

(d.h. es gibt eine Möglichkeit $K_0 A$ zu einer geordneten Gruppe zu machen, $K_0(\tau)$ erhält diese Ordnung).

Damit $A_{\vartheta_1} \cong A_{\vartheta_2} \Longleftarrow \mathbb{Z} + \vartheta_1\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \vartheta_2\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \vartheta_1 = \pm\vartheta_2 \mod \mathbb{Z}$

Nächstes Kapitel: Mehr Struktur als $(K_0(A), K_1(A))$, ...

Im Rørdams Buch findet sich auf den letzten Seiten eine Übersicht über verschiedene K-Gruppen.