§9 Buntes rund um die K-Theorie

9.1 Anwendungen der K-Theorie:

- $\mathbb{F}_n$ freie Gruppe $\rightsquigarrow$ $C^*(\mathbb{F}_n)$, $C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$
  (nicht isomorph, da $\mathbb{F}_n$ nicht amenabel)
  Frage: $n \neq m \Rightarrow C^*(\mathbb{F}_n) \not\cong C^*(\mathbb{F}_m)$? Antwort: ja.
  Pimsner-Voiculescu 1982: $K_0 C^*_{red}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}$, $K_1 C^*_{red}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}^n$
  später Cuntz: $\mathbb{F}_n$ ist <u>K-amenabel</u>, d.h. $K_i C^* \mathbb{F}_n = K_i C^*_{red} \mathbb{F}_n$, $i = 0,1$
- $\mathcal{O}_n \not\cong \mathcal{O}_m$, $n \neq m$
- $A_{\vartheta_1} \cong A_{\vartheta_2} \Leftrightarrow \vartheta_1 = \pm \vartheta_2 \mod \mathbb{Z}$
- Brown, Elliott 82: $0 \to \underset{AF}{A} \to B \to \overset{AF}{C} \to 0 \Rightarrow B$ AF
- Pimsner, Voiculescu 82: $C^*_{red} \mathbb{F}_n$ ist projektionslos
- Beweis der Bottperiodizität struktureller als im Kommutativen
- ... (s. z.B. „K-theory and C^*-algebras", Cuntz 84, LNM 1046)

9.2 K-Theorie als axiomatischer Funktor (Cuntz 84, Higson 88, Rosenberg 82):

Sei $\mathcal{C}$ die kleinste Klasse aller separablen C^*-Algebren, die $\mathbb{C}$ enthält, abgeschlossen ist unter induktiven Limiten, „2 aus 3" erfüllt ($0 \to A \to B \to C \to 0$ exakt, zwei der C^*-Algebren in $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ alle drei in $\mathcal{C}$), sowie abgeschlossen ist unter KK-Äquivalenz (s. später).
Dann enthält $\mathcal{C}$ alle (sep.) komm. C^*-Algebren, ist abgeschl. unter Tensorprodukt, $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, ... (also: $\mathcal{C}$ ist groß)

<u>Satz</u> (Cuntz, Rosenberg): Sei $E : \mathcal{C} \to \{\text{abelsche Gruppen}\}$ ein kovarianter Funktor, der homotopieinvariant, halbexakt, stabil und stetig ist
($\varphi_0 \sim_h \varphi_1 \Rightarrow E(\varphi_0) = E(\varphi_1)$) ($0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt $\Rightarrow E(I) \to E(A) \to E(B)$ exakt) ($E(A) = E(A \otimes \mathcal{K})$) ($E(\varinjlim A_n) = \varinjlim E(A_n)$)
und normiert ist auf $E(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, $E(S\mathbb{C}) = 0$.
Dann ist $E = K_0$.

Referenz wie oben

9.3 Das (Elliott-)Klassifikationsprogramm:

Elliott nutzte 1976 die K-Theorie in der Theorie der C^*-Algebren zum ersten Mal explizit.

- Sei A unital, $p,q \in M_\infty(A)$ Proj. $p \sim_s q :\Leftrightarrow \exists\, r \in M_\infty(A)$ Proj. mit $p\oplus r \sim q \oplus r$
  „stabil äquivalent"
- $K_0(A)_+ := \{p \in M_\infty(A) \text{ Proj.}\}/\sim_s$ (vgl. $H(A) := \{p \in M_\infty(A) \text{ Proj.}\}/\sim$ bzw. $\sim_u$)

  Dann ist $K_0(A)_+$ abelsche Halbgruppe mit 0, $K_0(A) = \mathrm{Groth}(K_0(A)_+)$
- G abelsche Gruppe. G heißt <u>geordnet</u>, falls es eine Menge $G_+ \subseteq G$ gibt mit $0 \in G_+$, $G_+ + G_+ \subseteq G_+$, $G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$, $G_+ - G_+ = G$. $u \in G_+$ heißt <u>Ordnungseinheit</u>, falls
  $\forall g \in G\ \exists k \in \mathbb{N}: -ku \leq g \leq ku$ (wobei $x \leq y :\Leftrightarrow y - x \in G_+$)
- Erinnerung: A heißt <u>AF-Algebra</u>, falls $A = \varinjlim_{\varphi_n} A_n$, wobei A_n endl.-dim. C^*-Algebren sind.
- A unitale AF-Algebra $\Rightarrow (K_0(A), K_0(A)_+, [1_A])$ geordnete Gruppe mit Ordnungseinheit.
- Elliott: A, B unitale AF-Algebren. Dann
  $$A \cong B \Leftrightarrow (K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \cong (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B])$$
- <u>Elliott-Vermutung</u>: Alle nuklearen, separablen C^*-Algebren werden durch eine (nicht näher spezifizierte) Invariante klassifiziert.
- typischer Satz im Klassifikationsprogramm: <u>Sei</u> $\mathcal{C}$ eine Klasse von C^*-Algebren und $\mathrm{Ell}_\mathcal{C}$ eine assoziierte Invariante.
  (z.B. $\mathrm{Ell}_\mathcal{C}(A) = (K_0(A), K_0(A)_+, [1_A], K_1(A), \{\text{Spuren auf } A\})$
  für $\mathcal{C} = \{A \text{ ist AH, einfach}\}$, AH: $A = \lim \bigoplus_{i=1}^{r_n} p_{n,i}(C(X_{n,i}) \otimes M_{k_{n,i}}(\mathbb{C}))p_{n,i}$)
  Dann gilt $\forall A, B \in \mathcal{C}: \quad A \cong B \Leftrightarrow \mathrm{Ell}_\mathcal{C}(A) \cong \mathrm{Ell}_\mathcal{C}(B)$.

Elliott-Programm: Rørdam, Størmer, Classification of Nuclear C^*-Algebras. Entropy in Operator Algebras, EMS 126, 2002, Abschn. 2.2

- Anwendungen von Elliotts Klassif. von AF-Algebren:
  (i) $\{\text{Ideale in } A\} \overset{\text{bij.}}{\Longleftrightarrow} \{\text{Ideale in } K(A)\}$
  (ii) A einfach $\Leftrightarrow$ $(K(A), K(A)_+)$ einfache Dimensionsgruppe
  (iii) $\{\text{Zustände auf } A\} \overset{\text{bij.}}{\Longleftrightarrow} \{\text{Zustände auf } K(A)\}$

Davidson IV.5

- Satz: Seien G_0, G_1 abzählbare abelsche Gruppen. Dann ex. eine C^*-Algebra A mit $(K_0(A), K_1(A)) = (G_0, G_1)$

Rørdam et al, An Introduction to K-Theory for C^*-algebras, Th. 13.2.4

- Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}$ die (große) Bootstrap class, definiert durch $\{A \in \mathcal{C} \mid A \text{ nuklear}\}$, also ist $\mathcal{N}$ die kleinste Klasse aller separablen, nuklearen C^*-Algebren, die $\mathbb{C}$ enthält, abgeschlossen ist unter induktiven Limiten, „2 aus 3" erfüllt und abgeschlossen ist unter KK-Äquivalenz (s. immer noch später). Offen: $\mathcal{N} \overset{?}{=} \{\text{alle sep., nukl. } C^*\text{-Algebren}\}$

- Satz (Universal Coefficient Theorem, Rosenberg-Schochet 87):
  A, B separabel, $A \in \mathcal{N}$. Dann ist
  $$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(K_*A, K_*B) \to KK^*(A,B) \to \mathrm{Hom}(K_*(A), K_*(B)) \to 0$$
  exakt.
  $\mathcal{N}$ wird auch die UCT-Klasse genannt.

- Satz (Kirchberg-Phillips 2000): Seien A, B Kirchbergalgebren (auch pi-sun genannt: purely infinite, simple, nuclear, separable) mit $A, B \in \mathcal{N}$. Dann $A \cong B \Leftrightarrow (K_0(A), K_1(A), [1_A]) \cong (K_0(B), K_1(B), [1_B])$

9.4 Die Baum-Connes-Vermutung:

- Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Was ist $K_i C^*_{red}(G)$? $i=0,1$
- Ist G abelsch, so ist $C^*_{red}(G) \cong C_0(\hat{G})$. Dann ist
  $$K_i C^*_{red}(G) \cong K^i(\hat{G}) \quad \text{(topologische K-Theorie von Atiyah-Hirzebruch)}$$
- Ist G nicht abelsch, so gibt es eine assembly map
  $$\mu: K_i^G(\underline{E}G) \to K_i(C^*_{red}G). \quad (K_*^{top}(G) \to K_*(C^*_{red}(G)))$$
  Die Vermutung ist, dass dies ein Isomorphismus ist.
  Die Philosophie ist: $K_i C^*_{red}(G)$ ist schwer zu berechnen, $K_i^{top}(G)$ leicht.
- Es gibt zig Varianten der Vermutung, mit vielen Teilresultaten, außerdem zig Querverbindungen, z.B. zur Allgemeinen Kadison-Vermutung (G torsionsfrei, diskret $\Rightarrow C^*_{red}(G)$ proj.los), zur Novikov-Vermutung etc.
  Die BC-Vermutung ist einer der wichtigsten Stimuli der K-Theorie

P. Baum, A. Connes, N. Higson, „Classifying Space for Proper Actions and K-Theory of Group C*-algebras", 1994, C*-Algebras 1943-1993.

9.5 Brown-Douglas-Fillmore-Theorie / Ext-Theorie / K-Homologie:

- Sei A unital. E heißt Erweiterung von A, falls
  $0 \to K \to E \to A \to 0$ exakt ist.
  E und E' heißen äquivalent, falls
  $$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & E & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id_K} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \psi\,\cong} & \circlearrowleft & \| & & \\ 0 & \to & K & \to & E' & \to & A & \to & 0 \end{array}$$
  $Ext(A) := \{[E] \mid E \text{ Erweiterung von } A\}$
  $Ext_w(A) := \{[\sigma] \mid \sigma: A \hookrightarrow Q(H) \text{ inj., unital}\}$
- $Ext(A)$ ist abelsche Halbgruppe mit neutralem Element, aber nicht immer eine Gruppe. (z.B. nicht für $C^*_{red}(F_2)$) Haagerup, Thorbjørnsen
- Es gilt $Ext_w(O_n) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ (wie $K_0(O_n) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ bekannt)
- Brown-Douglas-Fillmore ursprünglich: $T \in L(H)$ essentially normal, falls $\pi(T) \in Q(H)$ normal. Habe $0 \to K \to \pi^{-1}C^*(\pi(T)) \to C(\underbrace{\sigma_e(T)}_{=:X}) \to 0$.
  Versuche also $Ext(X)$ zu verstehen.
- BDF 77: X kompakt $\Rightarrow Ext\, C(X) \cong K_1(X)$ K-Homologie von X
- wichtiger noch: bivariante Variante ($\rightsquigarrow$ 9.6)

9.6 KK-Theorie / bivariante Theorien:

- Generelle Idee bei Berechnungen von K-Theorie: Habe C^*-Algebra A mit bekannten K-Gruppen und B mit unbekannten. Um „$K_iA \cong K_iB$" zu transferieren mit „verallgemeinerten Homotopieäquivalenzen". Bin also an bivarianter Theorie interessiert mit Objekten als C^*-Algebren, Morphismen $KK(A,B)$. Dann: „$\exists\, \gamma \in KK(A,B)$ invertierbar $\Rightarrow K_iA \cong K_iB$"
- Brown, Douglas, Fillmores Konzept führte zur ersten bivarianten Theorie:
  Seien A, B C^*-Algebren und $0 \to B \to E \to A \to 0$ exakt.
  $Ext(A,B) := \{$Äq.klassen von solchen Erweiterungen$\}$ bzw. $Ext(A, B \otimes K)$

  $$\left(\exists\, \gamma: \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B & \to & E_1 & \to & A & \to & 0 \\ & & \| & & \cong\downarrow\gamma & & \| & & \\ 0 & \to & B & \to & E_2 & \to & A & \to & 0 \end{array} \quad \text{„starke Äq."}\right)$$

  $Ext(A,B)$ komm. Halbgruppe mit Busby-Invariante $(\tau: A \to Q(B))$
  (Teile noch die zerfallenden Sequenzen raus.)
  Also $Ext(A) = Ext(A, \mathbb{C})$ aus 9.5.
  Habe $Ext(\mathbb{C}, B) = K_1B$, $Ext(S\mathbb{C}, B) = K_0B$
  Setze $K^1(A) := Ext(A) := Ext(A, \mathbb{C})$, falls A nuklear, separabel,
  $K^0(A) := Ext(A, S\mathbb{C})$ „K-Homologie von A"
- Kasparov entwickelte die KK-Theorie, was noch besser als Ext funktioniert.
  Cuntz' Bild davon: $0 \to B \xrightarrow{\iota} E \underset{\pi}{\overset{\alpha,\ \bar\alpha}{\rightleftarrows}} A \to 0$ „Doppelspalterweiterung"
  Liefert einen Hom. $K_iA \to K_iB$

  $$\left[\begin{array}{l} 0 \to K_iB \to K_iE \rightleftarrows K_iA \to 0 \text{ exakt mit } K_i\pi(K_i\alpha - K_i\bar\alpha) = 0 \\ \Rightarrow K_iA \xrightarrow{K_i\alpha - K_i\bar\alpha} \mathrm{Ker}\, K_i\pi = K_i\iota\, K_iB \xrightarrow{K_i\iota^{-1}} K_iB \end{array}\right.$$

  $KK(A,B) := \{\underset{\uparrow \text{Homotopie}}{[\varphi]} \mid \varphi: qA \to K \otimes B \text{ Hom.}\}$, wo $qA := \mathrm{Ker}(A * A \xrightarrow{\mathrm{id}} A)$

  Diese sind Homotopieklassen von Quasihomomorphismen, Abbildungen, die Doppelspalterweiterungen induzieren.
  Kasparovs Bild: Betrachte Tripel (graduierter Hilbertmodul über B, $\pi: A \to \mathcal{L}(E)$, $F \in \mathcal{L}(E)$), wo $F^2 = 1$, $F = F^*$ bis auf Kompakte, usw. Dann $KK(A,B)$ solche Tripel modulo Homotopie.
- Das wichtigste Feature: Habe Kasparov-Produkt $KK(A,B) \times KK(B,C) \to KK(A,C)$ eine Art Komposition von Quasihomomorphismen.

- Habe $KK_1 := KK(SA, B) = KK(A, SB)$ $\quad (KK_0 := KK)$

  und $KK_1(\mathbb{C}, B) = K_1(B)$, $\quad KK_0(\mathbb{C}, B) = K_0(B)$

  $KK_1(A, \mathbb{C}) = K^1(A)$, $\quad KK_0(A, \mathbb{C}) = K^0(A)$ $\quad \forall A, B$ separabel

  und A nuklear $\Rightarrow$ $KK_1(A, B) = Ext(A, B)$

- KK hat viele solche Eigenschaften, wie K-Theorie, ist allerdings nicht immer halbexakt. Daher entwickelten Connes und Higson ~~...~~ die E-Theorie.

  Es gilt $E(A, B) \cong KK_0(A, B)$ $\forall A$ nuklear, A, B separabel.

Blackadar, K-Theory for C^*-Alg.
Cuntz, K-theory and C^*-algebras, LNM 1046
Skript Vorlesung, Cuntz
für allgemeine nichtkommutative Homologietheorien (nicht nur für C^*-Algebren), siehe auch Cuntz, Skandalis, Tsygan, Cyclic homology in non-commutative geometry, vol 121 EMS, 2004

- Es gibt auch noch die Cuntz-Halbgruppe. Ist A eine C^*-Algebra und sind $a, b \in A$ positiv, so ist $a \precsim b$, falls es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_n b x_n^* \to a$ in Norm.

  $a \sim b :\iff a \precsim b \precsim a$, $\quad Cu(A) := (A \otimes K)_+ /_\sim$ geordnete Halbgruppe. Grob gesagt vergleicht die Cuntz Subäquivalenz die Trägerprojektionen der Elemente a, b.