UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung C^*-Algebren
Wintersemester 2011/2012
Blatt 4 (mit Tipp)

Aufgabe 1. Sei tr die normalisierte Spur auf $M_n(\mathbb{C})$, gegeben durch $\mathrm{tr}((a_{ij})) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_{ii}$. Es ist bekannt, dass $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ gilt. Sei $h \in M_n(\mathbb{C})$ ein positives Element und $f_h : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ durch $f_h(x) := \mathrm{tr}(hx)$ definiert.
Zeige, dass die Abbildung $h \mapsto f_h$ eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen der Menge der positiven Elemente von $M_n(\mathbb{C})$ und der Menge der positiven Funktionale von $M_n(\mathbb{C})$ definiert, mit $\|f_h\| = \mathrm{tr}(h)$.

Aufgabe 2. Sei f ein Zustand auf einer C^*-Algebra A und (π_f, H_f) die zugehörige GNS-Darstellung.

(a) Sei $I \lhd A$ ein Ideal in A. Zeige: $\quad I \subset \mathrm{kern}(\pi_f) \quad \Longleftrightarrow \quad I \subset \mathrm{kern}(f)$

(b) f heißt *treu*, falls $f(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ für jedes positive $a \in A$.
Zeige, dass $\mathrm{kern}(\pi_f) = 0$, falls f treu ist.

(c) Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in A. Zeige, dass $(\pi_f(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathcal{L}(H_f)$ in der starken Operatortopologie gegen 1 konvergiert (dass also $\pi_f(u_\lambda)\xi \to \xi$ gilt, für alle $\xi \in H_f$).

Zusatzaufgabe*. Harhar, eine Zusatzaufgabe! Zeige, dass es in jeder nicht-kommutativen C^*-Algebra ein nicht-triviales nilpotentes Element gibt ($x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$). Mit anderen Worten:
Sei A eine C^*-Algebra, in der 0 das einzige nilpotente Element ist. Dann ist A kommutativ.

Tipp: Sei $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ eine irreduzible Darstellung und $x \in A$. Hätte das Spektrum von $\pi(x)$ mindestens zwei Elemente, so gäbe es zwei Funktionen f und g mit $fg = 0$ und $f \neq 0$, $g \neq 0$. Diese ergäben invariante Teilräume für $\pi(A)$, was zu einem Widerspruch führte.
Benutze auch Satz 6.25.