UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung C^*-Algebren
Wintersemester 2011/2012
Blatt 5

Aufgabe 1. $M_n(\mathbb{C})$ und $\mathcal{K}$ als universelle C^*-Algebren (Beispiele 7.6 und 7.8).

(a) Zeige, dass die universellen C^*-Algebren aus Beispiel 7.6(ii) und (iii) sowie aus Beispiel 7.8(ii) und (iii) existieren (dass also die Halbnorm aus der Konstruktion 7.1 für alle Elemente beschränkt ist). Zeige dafür u.a., dass x_1 eine Projektion ist.

(b) Finde zwei *-Homomorphismen

$$\varphi : C^*(e_{ij}, i,j = 1,\dots,n \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}) \to C^*(x_1,\dots,x_n \mid x_i^*x_j = \delta_{ij}x_1)$$
$$\psi : C^*(x_1,\dots,x_n \mid x_i^*x_j = \delta_{ij}x_1) \to C^*(e_{ij}, i,j = 1,\dots,n \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il})$$

so dass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{C^*(x_1,\dots,x_n \mid \dots)}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{C^*(e_{ij}, i,j=1,\dots,n \mid \dots)}$. Folgere, dass die beiden universellen C^*-Algebren jeweils isomorph zu $M_n(\mathbb{C})$ sind.

(c) Übertrage (b) auch auf den Fall $\mathcal{K}$, also auf Beispiel 7.8.

Aufgabe 2. Betrachte die folgenden universellen C^*-Algebren.

(a) Finde eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $C^*(p, 1 \mid p \text{ ist eine Projektion}) \cong \mathbb{C}^n$ und beweise den Isomorphismus. (Hierbei ist 1 die Eins der C^*-Algebra auf der linken Seite, dh. die Relationen $1p = p1 = p$ gelten ebenfalls.)

(b) Finde eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass $C^*(s, 1 \mid s \text{ ist eine Symmetrie}) \cong \mathbb{C}^m$ und beweise den Isomorphismus. Eine *Symmetrie* ist ein selbstadjungiertes Unitäres.

(c) Finde einen expliziten Isomorphismus zwischen $C^*(p, 1 \mid p \text{ ist eine Projektion})$ und $C^*(s, 1 \mid s \text{ ist eine Symmetrie})$ für den Fall, dass $m = n$. Bearbeite (a) und (b) erneut, falls $m \neq n$.

Aufgabe 3. Sei H ein unendlichdimensionaler, separabler Hilbertraum. Zeige, dass jedes Ideal I in $\mathcal{L}(H)$ die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ enthält. Zeige zunächst, dass alle Rang-1-Operatoren (Operatoren mit eindimensionalem Bild) in I liegen.
Folgere, dass $\mathcal{K}(H)$ einfach ist.

Hierbei darf benutzt werden, dass die Menge $F(H)$ der Operatoren endlichen Rangs (dh. das Bild jeden Operators in $F(H)$ ist endlichdimensional) dicht ist in $\mathcal{K}(H)$.
Man kann übrigens sogar zeigen, dass $\mathcal{K}(H)$ das einzige Ideal in $\mathcal{L}(H)$ ist; zur Errinerung, siehe auch Prop. 1.20.