§ 10 Umkehrfunktionen, Logarithmus, Potenz

10.1 Definition: Sei $f: D \to \mathbb{R}$. Die Funktion heißt <u>monoton</u>, falls aus $x < y$ mit $x, y \in D$ immer folgt:

$f(x) \le f(y)$	<u>monoton wachsend</u>
$f(x) < f(y)$	<u>streng monoton wachsend</u>
$f(x) \ge f(y)$	<u>monoton fallend</u>
$f(x) > f(y)$	streng monoton fallend

10.2 Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend [bzw. fallend]. Dann bildet f das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf $[f(a), f(b)]$ ab und die Umkehrfunktion $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend [bzw. fallend].

<u>Beweis:</u> (i) Wegen der Monotonie gilt $f(a) \le f(x) \le f(b)$ $\forall x \in [a,b]$, also $f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f jedoch alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h. es gilt sogar $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

(ii) f ist injektiv: Seien $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, o.E. $x < y$. Dann $f(x) < f(y)$, d.h. insbesondere $f(x) \neq f(y)$.

(iii) Also ist $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$, $f^{-1}(f(x)) = x$ existiert.

(iv) f^{-1} ist stetig: (a) Sei $z \in (a,b)$ und $\varepsilon > 0$. Zeige: f^{-1} ist stetig in $f(z)$. Wähle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so dass $I_{\varepsilon'} := [z - \varepsilon', z + \varepsilon'] \subset (a,b)$ gilt. Die Einschränkung $f|_{I_{\varepsilon'}}: I_{\varepsilon'} \to \mathbb{R}$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes und daher ist $f(I_{\varepsilon'}) = [f(z) - \delta_1, f(z) + \delta_2]$ für bestimmte $\delta_1, \delta_2 > 0$ (nach (i) und der Monotonie). Setze $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann ist $(f(z) - \delta, f(z) + \delta) \subseteq [f(z) - \delta_1, f(z) + \delta_2]$ und für $|w - f(z)| < \delta$ ist also $w \in f(I_{\varepsilon'})$, d.h. $|\underbrace{f^{-1}(f(z))}_{= z} - \underbrace{f^{-1}(w)}_{\in I_{\varepsilon'}}| < \varepsilon' < \varepsilon$. Daher ist f^{-1} stetig in $f(z)$.

(b) Sei $z = a$. Zeige: f^{-1} ist stetig in $f(a)$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $I_\varepsilon := [a, a + \varepsilon]$. Dann $f(I_\varepsilon) = [f(a), f(a) + \delta]$ für ein $\delta > 0$ und $f^{-1}: [f(a), f(a) + \delta] \to I_\varepsilon$. D.h. $|w - f(a)| < \delta \Rightarrow f^{-1}(w) \in I_\varepsilon$, d.h. $|f^{-1}(w) - \underbrace{f^{-1}(f(a))}_{= a}| < \varepsilon$.

(c) für $z = b$: ebenso. (v) Monotonie von f^{-1} klar. $\square$

10.3 Korollar. Sei $k \in \mathbb{N}$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^k$.
Dann ist f streng monoton wachsend und stetig und besitzt daher eine stetige Umkehrfunktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[k]{x}$.

Beweis: f ist stetig nach 8.12(c) und streng monoton wachsend nach 5.2.
Um Satz 10.2 anwenden zu können, müsste $[0,\infty)$ beschränkt sein.
Betrachte daher $f_n : [0,n] \to [0,n^k]$, $x \mapsto x^k$, also $f_n := f|_{[0,n]}$.
Nach Satz 10.2 ex. dann $g_n : [0,n^k] \to [0,n]$ mit $g_n(f_n(x)) = x$.
Es ist $f([0,\infty)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n([0,n]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n^k] = [0,\infty)$.
Definiere $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := g_n(x)$, falls $x \in [0,n^k]$.
Diese Definition hängt nicht von n ab, d.h. $g_n(x) = g_m(x)$ für $m > n$.
$\left(f(g_n(x)) = f_n(g_n(x)) = x \text{ für } x \in [0,n^k],\ f(g_m(x)) = x, \text{ da } x \in [0,n^k] \subseteq [0,m^k] \right)$
Da f injektiv ist, folgt $g_n(x) = g_m(x)$.
Dann ist g stetig, da alle g_n stetig sind und $g(f(x)) = g_n(f_n(x)) = x$ für n groß genug. □

10.4 Korollar. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist streng monoton wachsend und besitzt eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, die wir mit $\ln : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnen, der „Logarithmus".
Es gilt $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\ \forall x,y \in (0,\infty)$, $\lim_{x\to\infty} (\ln x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} (\ln x) = -\infty$, $\ln(e) = 1$.

Beweis: (i) $\exp$ ist stetig nach 8.12.
(ii) $\exp$ ist str. monoton: Sei $x < y$. Schreibe $y = x + t$, $t > 0$.
Also $\exp(y) = \exp(x) \underbrace{\exp(t)}_{>1} > \exp(x)$. $\quad (\exp(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \ldots > 1)$
(iii) $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$: $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0,\infty)$ nach 6.16(c). Andererseits
$\exp(n) = 1 + n + \frac{1}{2}n^2 + \ldots > 1 + n \Rightarrow \exp(-n) \overset{6.16(b)}{=} \exp(n)^{-1} \leq \frac{1}{1+n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow [\frac{1}{1+n}, 1+n] \subseteq \exp([-n,n]) \Rightarrow (0,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{1+n}, 1+n] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \exp([-n,n]) = \exp(\mathbb{R})$.
(iv) Also ex. eine Umkehrfunktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Nach 10.2 ist diese stetig auf $\exp([-n,n])\ \forall n \in \mathbb{N}$, also auf ganz $(0,\infty)$.
(v) $\ln(xy) = \ln(\exp(s)\exp(t)) = \ln(\exp(s+t)) = s + t = \ln(x) + \ln(y)$

$(x = \exp(s), y = \exp(t), \text{ da } \exp \text{ surjektiv})$ ■

(vi) Für $x > e^n > 1 + n$ ist $\ln x > \ln(e^n) = n$, daher $\lim_{x\to\infty} (\ln x) = \infty$.
(vii) $\ln(e) = \ln(\exp(1)) = 1$. □

10.5 Definition: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a>0$ und $x \in \mathbb{R}$. Setze
$$a^x := \exp(x \cdot \ln(a)).$$

10.6 Lemma: Für $a>0$, $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ ist stetig.

(b) $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$ (also Def. 10.5 konsistent mit $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$)

(c) $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x b^x = (ab)^x$, $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(e) Mit $e := \exp(1)$ ist $e^x = \exp(x)$ (also $\exp(x)$ wie gewohnt als e^x)

(f) $\lim\limits_{x \to \infty} x^k e^{-x} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (d.h. e^{-x} fällt schneller als x^k wächst)

(g) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^\alpha = 0 \quad \forall \alpha > 0$

(h) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-\alpha} \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0$ (d.h. der Logarithmus wächst langsamer als polynomiell)

Beweis: (a) $h(x) := x \cdot \ln(a)$ ist stetig, $f = \exp \circ h$ ebenso.

(b) $a^n = \exp(n \ln(a)) = \exp(\underbrace{\ln(a) + \ldots + \ln(a)}_{n\text{-mal}}) \overset{6.15}{=} \exp(\ln(a))^n = a \cdot \ldots \cdot a$

(c) $a^{x+y} = \exp((x+y)\ln(a)) = \exp(x\ln(a) + y\ln(a)) = \exp(x\ln(a))\exp(y\ln(a)) = a^x a^y$

(d) ähnlich

(e) $e^x \overset{10.5}{=} \exp(x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = \exp(x)$.

(f) $e^x = 1 + \ldots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow e^{-x} < \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \Rightarrow e^{-x} x^k < \frac{(k+1)!}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

(g) und (h) ähnlich. $\square$