§11 Die komplexen Zahlen

In welchen Zahlbereichen kann man Gleichungen $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ immer lösen?

11.1 Bemerkung: Erweiterungen der Zahlbereiche anhand von Lösungen polynomieller Gleichungen.

(a) $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen, des „Zählens". Kann z.B. $x+2=4$ in $\mathbb{N}$ lösen ($x=2$).

Lösung von $x+4=2$ in $\mathbb{N}$? nicht möglich

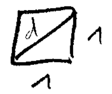
(b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ ganze Zahlen

Löst $x+4=2$ ($x=-2$), aber nicht $3x-2=0$.

(c) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ rationale Zahlen, das „Verhältnis" der Dinge zueinander (ratio). Löst $3x-2=0$ ($x=\frac{2}{3}$), aber nicht $x^2=2$.

(d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ wie in §2, reelle Zahlen

(Schock für Pythagoräer, die gerne den ganzen Kosmos in simplen Verhältnissen ausgedrückt hätten, also mit Hilfe von $\mathbb{Q}$: Dummerweise folgt ausgerechnet aus dem Satz von Pythagoras ein Gegenbeispiel mit



$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.)

Lösung von $x^2=2$ in $\mathbb{R}$ ($x=\sqrt{2}$), aber nicht von $x^2=-1$.

11.2 Definition: Wir definieren die komplexen Zahlen als Menge

$\mathbb{C} := \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ mit Addition und Multiplikation

$$(a_1+ib_1) + (a_2+ib_2) := (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$$

$$(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) := (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Die Zahl i heißt imaginäre Einheit und erfüllt $i^2=-1$.

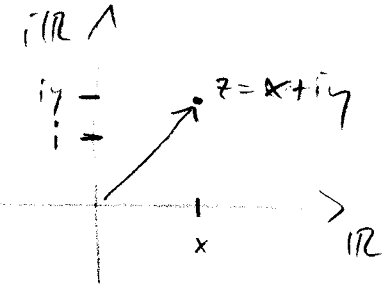
11.3 Bemerkung: Als Menge ist $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, d.h. wir statten $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit Addition $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$ und Multiplikation $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$ aus.
Hier ist $i = (0,1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ unter dieser Identifikation.
(*) Außerdem $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ per $a \mapsto a + i\cdot 0$, also $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $a \mapsto (a,0)$.

11.4 Bemerkung (Fundamentalsatz der Algebra): Die Menge der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen, d.h. für jedes Polynom $p(x) = a_nx^n + \dots + a_1x^1 + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$ gibt es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(x) = a_n(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)$.
Das Polynom zerfällt also vollständig in Linearfaktoren und die Zahlen $z_1, \dots, z_n$ sind genau die Nullstellen von p.
Insbesondere hat jede Gleichung $p(x)=0$ eine Lösung, d.h. die Zahlkörpererweiterung ist mit $\mathbb{C}$ abgeschlossen.

11.5 Satz: $\mathbb{C}$ ist ein Körper.
Beweis: nachrechnen der Axiome. □

11.6 Bemerkung: (a) $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet (und also auch nicht archimedisch).
Denn: Wäre $\mathbb{C}$ angeordnet, so gälte $z^2 \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ (2.8(i)), also insbesondere $-1 = i^2 \geq 0$. Andererseits aber $1 > 0$ (2.8(i)), also $-1 < 0$ (2.8(f)). Widerspruch (zu $\mathbb{C}_+ \cap (-\mathbb{C}_+) = \{0\}$).
Also: $z_1 < z_2$ oder Monotonie macht in $\mathbb{C}$ keinen Sinn!
(b) $\mathbb{C}$ ist vollständig, siehe später.

(*) Die Elemente aus $\mathbb{C}$ können auf der Zahlenebene veranschaulicht werden.
Addition ≙ Addition von Vektoren
Multiplikation ≙ ? (später)



11.7 Definition: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ setze

$\mathrm{Re}(z) := x$ Realteil, $\mathrm{Im}(z) := y$ Imaginärteil

$\bar{z} := x - iy$ Konjugierte von z, $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ Betrag

11.8 Bemerkung: Unter $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ist $\mathrm{Re} \mathrel{\hat{=}}$ x-Koordinate, $\mathrm{Im} \mathrel{\hat{=}}$ y-Koordinate, $\bar{z} \mathrel{\hat{=}}$ Spiegelung an der x-Achse, $|z| \mathrel{\hat{=}}$ Länge des Vektors

11.9 Beispiel: $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+i$

$z_1 + z_2 = 3+4i$, $z_1 - z_2 = 1+2i$, $z_1 z_2 = (2-3)+(2+3)i = -1+5i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{5+i}{2}$, $\mathrm{Re}\, z_1 = 2$, $\mathrm{Im}\, z_1 = 3$,

$\bar{z}_1 = 2-3i$, $|z_1| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen $z^2 = -4$? $z = 2i$ und $z = -2i$

Die Zahl -4 hat also zwei Quadratwurzeln in $\mathbb{C}$.

Allgemeiner hat $z^n = w$ n Lösungen.

11.10 Proposition: Es gilt:

(a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

(b) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(c) $|\bar{z}| = |z|$, $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|z|^2 = z\bar{z}$

(d) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ falls $z \neq 0$

(f) $|zw| = |z||w|$, $|z+w| \leq |z|+|w|$

(e) $|z| \geq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

insbes. $|z| \in \mathbb{R}$

Beweis: (a) $\frac{1}{2}\left((a+ib)+(a-ib)\right) = \frac{1}{2}(2a) = a = \mathrm{Re}(a+ib)$ etc

(b) nachrechnen

(c) $|\mathrm{Re}(a+ib)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |a+ib|$ etc

(d) $z\cdot\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right) = 1$, also $\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ multiplikatives Inverses von z.

(e) nachrechnen

(f) $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = |z|^2|w|^2$, dann Wurzel ziehen s. (e).

$$|z+w|^2 \overset{(c)}{=} (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = \underbrace{z\bar{z}}_{=|z|^2} + \underbrace{w\bar{w}}_{=|w|^2} + \underbrace{z\bar{w}+\bar{z}w}_{=2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})}$$

nachrechnen

$$\le |z|^2+|w|^2 + 2\,|\mathrm{Re}(z\bar{w})| \overset{(c)}{\le} |z|^2+|w|^2+2\,|z||w| = (|z|+|w|)^2$$

$$\Rightarrow |z+w| \le |z|+|w|$$

□

Obwohl $\mathbb{C}$ also selbst nicht angeordnet werden kann, d.h. obwohl „$z<w$" keinen Sinn macht in $\mathbb{C}$, haben wir einen sinnvollen Abstandsbegriff $|z-w| \in \mathbb{R}$ und können die bisherige Analysis für $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen.

11.11 Definition: Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen

(a) ... konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N: |z-z_n|<\varepsilon$

11.12 (*) (b) ... heißt Cauchyfolge, falls $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\ge N: |z_n-z_m|<\varepsilon$

11.13 Proposition: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen, $a,b\in\mathbb{C}$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a)$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow (\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen

(c) $a_n \to a,\ b_n \to b \Rightarrow a_n+b_n \to a+b,\ a_nb_n \to ab,\ \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ (falls $a\neq 0$)

(d) $a_n \to a \Rightarrow \bar{a}_n \to \bar{a}$

Beweis: (a) „$\Rightarrow$" $|\mathrm{Re}(a_n)-\mathrm{Re}(a)| = |\mathrm{Re}(a_n-a)| \overset{11.10}{\le} |a_n-a| < \varepsilon$, $n\ge N$

Ebenso für Im. „$\Leftarrow$" $|a_n-a|^2 = \mathrm{Re}(a_n-a)^2 + \mathrm{Im}(a_n-a)^2$

$$= \underbrace{|\mathrm{Re}(a_n)-\mathrm{Re}(a)|^2}_{\to 0} + \underbrace{|\mathrm{Im}(a_n)-\mathrm{Im}(a)|^2}_{\to 0}$$

(b) analog zu (a)

(c) wie in $\mathbb{R}$, z.B. $|(a_n+b_n)-(a+b)| \le |a_n-a|+|b_n-b|$.

Siehe Beweise in 3.12 (Beachte: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow (|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$, also beschränkt)

(d) $|\bar{a}_n - \bar{a}| = |\overline{a_n-a}| = |a_n-a|$

□

11.14 Korollar: $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Beweis: 11.13 (a) & (b). $\square$

11.15 Bemerkung: (a) Eine Reihe $\sum a_k$ komplexer Zahlen heißt absolut konvergent, falls $\sum |a_k|$ konvergiert. Es gilt: Jede absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen konvergiert.

[Beweis: $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Sei $n > m$. $|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = |t_n - t_m|$ für $t_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. (t_n) konv. $\Rightarrow$ (t_n) Cauchy $\Rightarrow$ (s_n) Cauchy $\Rightarrow$ (s_n) konv.]

(b) Ebenso können viele Resultate aus §5 und §6 übertragen werden, sofern die Ordnung auf $\mathbb{R}$ nur für $|x|$ benutzt wurde.
(Bspw.: 5.1, 5.2 okay, 5.4 & 5.15 hingegen nicht; Quot.- und Wurzelkrit. okay)
Außerdem können absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$ beliebig umgeordnet werden.
(Betrachte für Analogon von 6.8 Realteil und Imaginärteil getrennt.)

(c) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent $\left(\sum \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum \frac{|z|^n}{n!} = \exp(|z|) \right)$ und nach (a) also auch konvergent. Insofern lässt sich exp fortsetzen zu $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und es gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ und $\exp(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Hingegen gilt nicht $\exp(z) > 0$, denn zwar $\exp(z) = \exp\left(\frac{z}{2}\right)^2$, aber $w^2 \ngtr 0$ in $\mathbb{C}$ (im Allgemeinen).

11.16 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z \in D$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall w \in D$ mit $|z - w| < \delta$: $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$
(äquivalent: für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in D$, $z_n \to z$ gilt: $f(z_n) \to f(z)$)
Die Funktion heißt stetig auf D, falls f stetig in allen $z \in D$ ist.

11.16 Proposition:

(a) Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

(b) Sind $f,g: D \to \mathbb{C}$ stetig, so auch $f+g$, fg und λf für $\lambda \in \mathbb{C}$, außerdem $\frac{f}{g}$, falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$ und $f \circ g$ falls $f(D) \subseteq E$, $g: E \to \mathbb{C}$.

(c) Ist $f: D \to \mathbb{C}$ stetig, so auch $\mathrm{Re}\, f: D \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}\, f: D \to \mathbb{R}$.

(d) Die Funktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis: (a) 11.13(d)

(b) exakt wie in 8.11.

(c) $|\mathrm{Re}\, f(z_n) - \mathrm{Re}\, f(z)| = |\mathrm{Re}(f(z_n) - f(z))| \le |f(z_n) - f(z)|$

(d) exp ist stetig in 0 wie im reellen Fall:

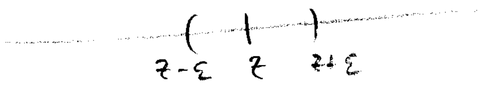
$$|\exp(z) - \underbrace{\exp(0)}_{=1}| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \cdot \frac{1}{1-|z|} \le 2|z| \quad \text{falls } |z| < \tfrac{1}{2}$$

Und exp stetig in beliebigem $z \in \mathbb{C}$:

$$|\exp(w) - \exp(z)| \underset{w=z+u}{=} |\exp(z+u) - \exp(z)| = |\exp(z)|\,|\exp(u) - \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\exp(0)}}|$$

Für $\underbrace{|w-z|}_{=|u|} < \min\left(\frac{\varepsilon}{2|\exp(z)|}, \frac{1}{2}\right)$ also $|\exp(w) - \exp(z)| < \varepsilon$ $\square$

11.17 Bemerkung: Wie sehen $w \in \mathbb{R}$ aus mit $|w-z| < \varepsilon$, $z \in \mathbb{R}$?



Wie sehen $w \in \mathbb{C}$ aus mit $|w-z| < \varepsilon$, $z \in \mathbb{C}$?