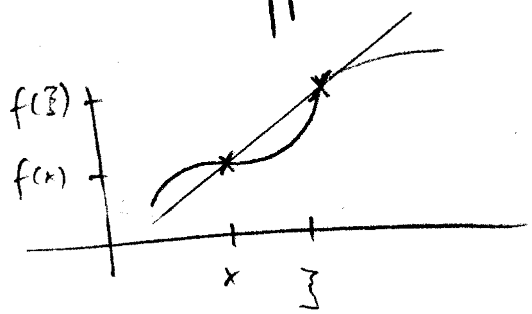
§ 13 Differentiation

Betrachte



Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ ist $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$.

Was ist die Steigung in $(x, f(x))$? Grenzwert $\xi \to x$. (Tangente an diesem Punkt) Bezeichne $f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$ (falls ex.)

Dann ist die Funktion $y \mapsto f(x) + f'(x)(y-x)$ die beste lineare Approximation der Funktion f nah bei $x \in D$. Diese Approximation ist „lokal", d.h. in kleiner Umgebung (also nicht nur in einem Punkt)!

13.1 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f differenzierbar im Punkt $x \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D \setminus \{x\}}} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

existiert.

(Hierbei wird vorausgesetzt, dass mind. eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D\setminus\{x\}$ mit $\xi_n \to x$ existiert.)

Falls der Grenzwert existiert, wird er mit $f'(x)$ bezeichnet und heißt Ableitung von f in x (oder Differentialquotient).

Schreibe auch $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f \big|_{x=x_0}$ oder $f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0 \\ x+h \in D}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Die Funktion f heißt differenzierbar auf D, falls sie in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Ist $f: D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, so schreiben wir für die n-te Ableitung $f^{(n)}: D \to \mathbb{R}$ (also $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, ...).

Ist $f': D \to \mathbb{R}$ stetig, so sagen wir f ist stetig differenzierbar.

13.2 Beispiele: (a) $D=\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto c$, $c\in\mathbb{R}$ konstante Funktion.

Dann $\dfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\dfrac{c-c}{\xi-x}=0 \quad \forall x,\xi\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

(b) $D=\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x$. $\dfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\dfrac{\xi-x}{\xi-x}=1 \Rightarrow f$ diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x)=1 \ \forall x\in\mathbb{R}$

(c) $D=\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$. $\dfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\dfrac{(\xi+x)(\xi-x)}{\xi-x}=\xi+x\to 2x$ für $\xi\to x$

$\Rightarrow f$ diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x)=2x \ \forall x\in\mathbb{R}$.

13.3 Satz: Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und $f:D\to\mathbb{R}$, $x\in D$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist diffbar in x

(ii) Es existiert ein $c\in\mathbb{R}$ und eine Funktion $\sigma: E\to\mathbb{R}$ mit $E:=\{h\in\mathbb{R}\mid x+h\in D\}$, so dass $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0\\ h\in E}}\dfrac{\sigma(h)}{h}=0$ und

$$f(x+h)=f(x)+\underbrace{ch}_{\text{linear}}+\underbrace{\sigma(h)}_{\text{verschwindend}} \quad \forall x,h\in\mathbb{R} \text{ mit } x,x+h\in D$$

(iii) Es existiert eine Funktion $\eta: D\to\mathbb{R}$, die stetig in x ist mit

$$f(y)=f(x)+\eta(y)(y-x) \quad \forall y\in D$$

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so ist $f'(x)=c=\eta(x)$.

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Definiere $\sigma(h):=\big(f(x+h)-f(x)\big)-f'(x)h$.

Dann $\dfrac{\sigma(h)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\to 0$ für $h\to 0$

(ii)$\Rightarrow$(iii): Setze $\eta(y):=\begin{cases} c+\dfrac{\sigma(y-x)}{y-x} & y\neq x\\ c & y=x\end{cases}$. η stetig in x.

Mit $\underset{h\neq 0}{y=x+h}$ also $f(x)+\eta(y)(y-x)=f(x)+ch+\sigma(h)=f(x+h)=f(y)$.

(iii)$\Rightarrow$(i): $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=\dfrac{f(x)+\eta(y)(y-x)-f(x)}{y-x}=\eta(y)\to\eta(x)$ für $y\to x$

$\Rightarrow$ Grenzwert existiert. $\square$

13.4 Bsp. (*)

13.5 Korollar: Ist $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar in $x \in D$, so auch stetig in $x \in D$.

Beweis: Nach 13.3(iii) ex. $\eta: D \to \mathbb{R}$ stetig in x und $y \mapsto y-x$ ebenfalls stetig in x. Somit $y \mapsto \eta(y)(y-x)$ stetig in x und daher auch $y \mapsto f(x) + \eta(y)(y-x)$, da hier $f(x)$ bloß eine Konstante ist. □

13.6 Satz: Seien $f,g: D \to \mathbb{R}$ diffbar in $x \in D$. Dann gilt:

(a) $f+g$ ist diffbar in x mit $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(b) λf ist diffbar in x mit $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$

(c) fg ist diffbar in x mit $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ „Produktregel"

Beweis: (a) & (b): einsetzen. $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$ etc.

(c) Nach 13.3(iii) ex. Funktionen $\eta: D \to \mathbb{R}$ und $\lambda: D \to \mathbb{R}$, so dass $f(y)-f(x) = \eta(y)(y-x)$ und $g(y)-g(x) = \lambda(y)(y-x)$.

Also $(fg)(y) - (fg)(x)$

$$
\begin{aligned}
&= f(y)g(y) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(x)g(x) \\
&= (f(y)-f(x))g(y) + f(x)(g(y)-g(x)) \\
&= \eta(y)(y-x)g(y) + f(x)\lambda(y)(y-x) \\
&= (y-x)\underbrace{[\eta(y)g(y) + \lambda(y)f(x)]}_{=:\zeta(y)}
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $\zeta: D \to \mathbb{R}$ stetig in x, da η, g und λ stetig in x sind.

$\overset{13.3}{\Longrightarrow}$ fg ist diffbar in x mit $(fg)'(x) = \zeta(x) = \eta(x)g(x) + \lambda(x)f(x)$ mit $\eta(x) = f'(x)$ und $\lambda(x) = g'(x)$. □

(*) 13.4 **Beispiel:** $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Dann $f(y) - f(x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy} = (y-x)\cdot\eta(y)$ mit $\eta(y) = -\frac{1}{xy} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$ und η ist stetig in x (8.11(a)). Und $f'(x) = \eta(x) = -\frac{1}{x^2}$.

13.7 Korollar: Ist $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ eine Polynomfunktion auf $\mathbb{R}$, so ist $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$.

Insbesondere ist für $f(x) = x^n$ die Ableitung $f'(x) = n x^{n-1}$.

Beweis: Induktion nach n für $f(x) = x^n$ (für allgem. Polynom benutze 13.6(a)&(b)).

I.B. ($n=1$): $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$ nach Bsp. 13.2(b).

I.S. ($n \to n+1$): Betrachte $f(x) = x^{n+1}$. Dann $f(x) = x^n \cdot x$ und nach 13.6(c)

$$f'(x) \overset{\text{I.V.}}{=} n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) x^n .$$

□

13.8 Satz (Kettenregel): Seien $f: E \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $g(D) \subseteq E$, g diffbar in $x \in D$, f diffbar in $g(x) \in E$.

Dann ist $f \circ g$ diffbar in x und $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Beweis: Nach 13.3(iii) ex. Funktionen $\eta: D \to \mathbb{R}$, stetig in $x \in D$ und $\lambda: E \to \mathbb{R}$ stetig in $g(x) \in E$ mit

$$g(y) - g(x) = \eta(y)(y-x) \quad \text{und} \quad f(z) - f(g(x)) = \lambda(z)(z - g(x)).$$

Also

$$\begin{aligned}(f\circ g)(y) - (f \circ g)(x) &= f(g(y)) - f(g(x)) \\ &= \lambda(g(y))(g(y) - g(x)) \\ &= \lambda(g(y))\, \eta(y)\, (y-x).\end{aligned}$$

Hierbei ist $\zeta: D \to \mathbb{R}$, $\zeta(y) := \lambda(g(y))\eta(y)$ stetig in x.

$\overset{13.3}{\Longrightarrow}$ $f \circ g$ diffbar in x und $(f \circ g)'(x) = \zeta(x) = \lambda(g(x))\eta(x) = f'(g(x))g'(x)$.

□

13.9 Satz (Quotientenregel): Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(y) \neq 0 \ \forall y \in D$ und f, g diffbar in $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ diffbar in x und
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Beweis: Sei $h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Nach 13.4 ist $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Nach 13.7 ist nun $h \circ g$ diffbar in x mit $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$.
Nach 13.6(c): $\frac{f}{g} = f \cdot (h \circ g)$ diffbar mit
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x)(h\circ g)(x) + f(x)(h \circ g)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f(x)g'(x)}{-g(x)^2}. \qquad \square$$

13.10 Proposition: exp, sin und cos sind diffbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt: $\exp'(x) = \exp(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Beweis: 1.) exp diffbar in 0: Nach 6.16(d) gilt (mit $N=1$):
$$|\exp(x) - (1+x)| \leq 2\frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \quad \text{falls } |x| \leq \tfrac{3}{2}.$$
$$\Rightarrow \left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| \leq |x| \quad \text{und also} \quad \exp'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = 1$$

2.) exp diffbar in $x \in \mathbb{R}$: $\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h} \to \exp(x) \cdot 1$, $h \to 0$
$\Rightarrow$ exp diffbar in x mit $\exp'(x) = \exp(x)$.

3.) Betrachte nun $z := ix \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt ebenfalls
$$\frac{\exp(i(x+h)) - \exp(ix)}{ih} = \exp(ix)\frac{\exp(ih) - 1}{ih} \to \exp(ix) \text{ für } h \to 0$$
denn die Abschätzung von 6.16(d) wie in 1.) gilt auch in $\mathbb{C}$.
$$\Rightarrow \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\operatorname{Im}(\exp(i(x+h))) - \operatorname{Im}(\exp(ix))}{h}$$
$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\exp(i(x+h)) - \exp(ix)}{ih}\right) \longrightarrow \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \cos(x) \quad (\operatorname{Re} \text{ stetig})$$

Ebenso für cos. Benutzt: $\operatorname{Re}\left(\frac{a+ib}{i}\right) = \operatorname{Re}(-ai+b) = b = \operatorname{Im}(a+ib)$
$\operatorname{Im}\left(\frac{a+ib}{i}\right) = -a = -\operatorname{Re}(a+ib)$

$\square$

13.11 Satz: Seien $f: D \to E$, $g: E \to D$ stetig, so dass $f \circ g = id_E$ und $g \circ f = id_D$ (d.h. $g = f^{-1}$ Umkehrfkt von f).
Ist f in $x \in D$ diffbar und $f'(x) \neq 0$, so ist g in $f(x) \in E$ diffbar und $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Beweis: Nach 13.3(iii) ex. $\eta: D \to \mathbb{R}$ stetig in x mit $f(y) - f(x) = \eta(y)(y-x)$. Setze $z := f(x)$. Sei $w \in E$ mit $w \neq z$.

$$g(w) - g(z) = g(w) - g(z) \frac{w-z}{f\circ g(w) - f \circ g(z)}$$
$$= (w-z) \frac{g(w) - g(z)}{f(g(w)) - f(x)} \qquad \text{da } g(z) = x$$
$$= (w-z) \frac{g(w)-g(z)}{\eta(g(w))(g(w)-x)},$$
$$= (w-z) \cdot \underbrace{\frac{1}{\eta(g(w))}}_{=: \zeta(w)}$$

Hierbei ist $\zeta: E \to \mathbb{R}$ stetig in z, denn g stetig in z und η stetig in $x = g(z)$. Außerdem $\eta(g(w)) \neq 0$ $\forall w \in E$, denn $\eta(g(w)) = 0 \Rightarrow f(g(w)) - f(x) = 0 \overset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} g(w) = x = g(z) \overset{g \text{ inj.}}{\Rightarrow} w = z$
aber $\eta(g(z)) = \eta(x) = f'(x) \neq 0$.
Also ist g diffbar in $z = f(x)$ und $g'(z) = \zeta(z) = \frac{1}{\eta(g(z))} = \frac{1}{\eta(x)} = \frac{1}{f'(x)}$

$\square$

13.12 Proposition: Der Logarithmus $\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist diffbar mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Beweis: $\ln$ ist Umkehrfkt von $\exp$, also nach 13.11 diffbar mit
$$\ln'(x) = \ln'(\exp(y)) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \quad \text{für } x = \exp(y).$$

$\square$

13.13 Proposition: (a) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist diffbar mit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(b) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist diffbar mit $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

(c) $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist diffbar mit $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

(d) $\arcsin, \arccos: [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $\arctan: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind diffbar mit $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(e) $\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sind diffbar mit $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$

Beweis: (b) $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. Also diffbar mit

$$f'(x) \overset{13.8}{=} \exp'(\alpha \ln x) \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

denn $\frac{1}{x} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \exp(-\ln x) = x^\beta$ mit $\beta = -1$ $\quad (x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta})$

(a) Sei $\alpha = \frac{1}{2}$. Dann $x^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \ln x) \geq 0$ und $(x^{\frac{1}{2}})^2 = \exp(2 \cdot \frac{1}{2} \ln x) = x$

$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ und nach (b) ist $f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(c) & (e): Blatt 12

(d) $\arcsin'(\sin y) = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$

arccos' ebenso. $\quad$ (für $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos y > 0$, also $\sqrt{\cos^2 y} = \cos y$)

$\square$

13.14 Bemerkung: Die Funktion $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig in 0 (sogar auf ganz $\mathbb{R}$), aber nicht diffbar in 0.

Denn $\frac{|0+h| - |0|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h > 0 \\ -1 & \text{für } h < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|0+h|-|0|}{h}$ ex. nicht.