Analysis I

SoSe 2015
M. Weber

§1 Formale Grundlagen, Beweisverfahren, Mengenlehre

1.1 Aussagenlogik:

In der Mathematik beschäftigen wir uns mit Aussagen $A, B, \ldots$
Diese können entweder wahr oder falsch sein, nicht aber beides gleichzeitig.

Sind A und B Aussagen, so ist:

(a) Negation: $\neg A$ („nicht A")

(b) Konjunktion: $A \wedge B$ („A und B")

(c) Disjunktion: $A \vee B$ („A oder B" - kein "entweder/oder" sondern ein einschließendes)

(d) Implikation: $A \Rightarrow B$ („aus A folgt B" / „A impliziert B")

(e) Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ („A ist äquivalent zu B" / „A genau dann wenn B")

Veranschaulichung anhand von Wahrheitstafeln:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bsp. zu $A \Rightarrow B$:

(1) Wenn $\underbrace{1+1=2}_{\substack{A\\w}}$ ist, $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{ist Berlin die Hauptstadt von Deutschland}}_{\substack{B\\w}}$. $A \Rightarrow B$: w

(3) wenn $1+1=3$ ist, ist Berlin die H.stadt von Dtl.
(A: f, B: w, $A \Rightarrow B$: w Aus etwas Falschem kann man alles folgen)

(2) wenn $1+1=2$ ist, ist Paris die H.stadt von Dtl. ($A \Rightarrow B$: f)

(4) wenn $1+1=3$ ist, ist Paris die H.stadt von Dtl. ($A \Rightarrow B$: w)

Regeln:

(i) $A \wedge \neg A$ ist immer falsch (siehe Wahrheitstafeln mit $B = \neg A$)

(ii) $A \vee \neg A$ ist immer wahr

(iii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ (haben die selben Wahrheitstafeln)

(iv) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	w	w

stimmen überein

(v) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

(vi) $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

(vii) $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\neg A \vee B]$

(viii) $[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$

(ix) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \Rightarrow C)]$

Sei $A(x)$ eine Aussage mit einem Platzhalter x aus der Menge M.

(f) Allquantor: $\forall x \in M : A(x)$ („für alle x aus der Menge M gilt $A(x)$")

(g) Existenzquantor: $\exists x \in M : A(x)$ („es gibt (mind.) ein x in M, für das $A(x)$ gilt")

Bsp: (1) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \geq x$ (wahre Aussage)

(2) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4$ (wahre Aussage für $x = 2$ oder $x = -2$)

(3) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 2$ (falsch)

Beachte: $\forall x \in M \; \forall y \in N : A(x,y)$
bedeutet das gleiche wie $\forall y \in N \; \forall x \in M : A(x,y)$

aber $\forall x \in M \; \exists y \in N : A(x,y)$
unterscheidet sich von $\exists y \in N \; \forall x \in M : A(x,y)$

Bsp: $\forall x \in \mathbb{N} \; \exists y \in \mathbb{N} : x < y$ wahr („zu jeder Zahl gibt es eine größere")

$\exists y \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{N} : x < y$ falsch („es gibt eine größte")

Regeln:

(x) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff (\exists x \in M : \neg A(x))$

(xi) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff (\forall x \in M : \neg A(x))$

Bsp: Verneinung von „$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} : x < y$" ist:

$$\neg(\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} : x < y)$$
$$\iff \forall y \in \mathbb{N} : \neg(\forall x \in \mathbb{N} : x < y)$$
$$\iff \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x < y)$$
$$\iff \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : x \geq y$$

1.2 Mengenlehre:

„Naive" Definition von Cantor (1895): „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten in unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Problematische Definition, da z.B. „die Menge aller Mengen" zu einem Widerspruch führen würde (Lösung: axiomatische Mengenlehre, Zermelo-Fraenkel etc.).

Für uns als Ausgangspunkt aber brauchbar.

Bezeichnungen:

$M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ Elemente $x_1, x_2, x_3, \dots$ der Menge M.

(Reihenfolge ist irrelevant: $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$)

(keine Dopplungen: $\cancel{\{1,1,1\}} = \{1\}$)

$x \in M$ „x ist Element von M"

$x \notin M$ „x ist nicht Element von M"

$N \subseteq M$ „N ist enthalten in M" / „N ist Teilmenge von M"

$N = M \ :\iff\ N \subseteq M$ und $M \subseteq N$

$|M|$ Anzahl der Elemente von M

Regeln:

(i) $N \subseteq M \iff \forall x \in N : x \in M$

Bsp: $\emptyset$ leere Menge (enthält keine Elemente)

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (für manche Autoren: $0 \in \mathbb{N}$)

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M

$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$

Sind M, N Mengen, so bezeichnen wir:

(a) Vereinigung: $M \cup N$ $\quad (x \in M \cup N :\iff x \in M \vee x \in N)$

(b) Durchschnitt: $M \cap N$ $\quad (x \in M \cap N :\iff x \in M \wedge x \in N)$

(c) Komplement: $M \setminus N$ $\quad (x \in M \setminus N :\iff (x \in M) \wedge (x \notin N))$

(d) Ist I eine Indexmenge und sind M_i, $i \in I$ Mengen, so ist $\bigcup_{i \in I} M_i$ gegeben durch $x \in \bigcup_{i \in I} M_i :\iff \exists i \in I : x \in M_i$

und $\bigcap_{i \in I} M_i$ gegeben durch $x \in \bigcap_{i \in I} M_i :\iff \forall i \in I : x \in M_i$

Regeln:

(ii) $M \cup N = N \cup M$, $M \cap N = N \cap M$, $(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$, $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$

(iii) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

Bezeichnung: Ist M eine Menge, so bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M, d.h. $A \in \mathcal{P}(M) :\iff A \subseteq M$

Bsp.: $M = \{1, 2, 3\}$. $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$|M| = 3$, $|\mathcal{P}(M)| = 8$

Erkenntnisse in der Sprache der Mathematik zu formulieren bedeutet, Aussagen zu beweisen, d.h. Aussagen müssen auf andere wahre Aussagen zurückgeführt werden. Den Anfang einer solchen Begründungskette bilden Axiome, also Aussagen, die als wahr angenommen werden. Wir lernen nun verschiedene Beweisprinzipien kennen.

1.3 der direkte Beweis ($A \Rightarrow B$):

Beweise B ausgehend von der wahren Aussage A, typischerweise durch einfügen von Zwischenschritten $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$.

Bsp1: Ist $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl, so auch n^2.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{N}}$$, d.h. n^2 ist gerade. $\square$

Bsp2 (Regeln von de Morgan): Seien M_0 und M_i, $i \in I$ Mengen.

(a) $$M_0 \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) = \bigcap_{i \in I} (M_0 \setminus M_i)$$

(b) $$M_0 \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i \right) = \bigcup_{i \in I} (M_0 \setminus M_i)$$

Beweis: (a) Sei $x \in M_0 \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right)$

$$\overset{\text{Def. 1.2(c)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in M_0 \text{ und } x \notin \bigcup_{i \in I} M_i$$

$$\overset{\text{Def. 1.2(d)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in M_0 \text{ und } \neg(\exists i \in I : x \in M_i)$$

$$\overset{\text{Regel 1.1(xi)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in M_0 \text{ und } \forall i \in I : x \notin M_i$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall i \in I : x \in M_0 \text{ und } x \notin M_i$$

$$\overset{\text{Def. 1.2(c)}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall i \in I : x \in (M_0 \setminus M_i)$$

$$\overset{\text{Def. 1.2(d)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in \bigcap_{i \in I} (M_0 \setminus M_i)$$

(b) analog $\square$

1.4 Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)

Es gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Also können wir $A \Rightarrow B$ beweisen, indem wir $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen.

Bsp: Ist $n \in \mathbb{N}$ und n^2 ist ungerade, so ist n ungerade.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Will zeigen: n^2 ungerade $\Rightarrow$ n ungerade.

Zeige stattdessen (da äquivalent): $\underbrace{\neg(n \text{ ungerade})}_{\Leftrightarrow\, n \text{ gerade}} \Rightarrow \underbrace{\neg(n^2 \text{ ungerade})}_{\Leftrightarrow\, n^2 \text{ gerade}}$

Das wurde jedoch schon in Bsp 1 von 1.3 gezeigt. $\square$

1.5 Beweis durch Widerspruch ($\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$)

Zeige, dass aus $\neg A$ ein Widerspruch folgt. Dann kann $\neg A$ also nicht wahr sein, also ist $\neg A$ falsch, d.h. A ist wahr.

Bsp: Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} := \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$.

Beweis: $\neg A$ (Annahme): $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Also gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Wir können annehmen, dass p und q teilerfremd sind, der Bruch also gekürzt ist. Wir haben $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Also $p^2 = 2q^2$, d.h. p^2 ist gerade. Wie in 1.4 kann man zeigen, dass dann auch p gerade ist, d.h. $p = 2a$ für ein $a \in \mathbb{N}$.

Somit $4a^2 = p^2 = 2q^2$, d.h. $q^2 = 2a^2$ ist gerade.

Daher ist auch q gerade und p und q sind nicht teilerfremd. ↯ $\square$

1.6 Beweis durch vollständige Induktion („$A(1)$, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$")

Sei $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage. Ist nun $A(1)$ wahr und gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, so ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beachte: (a) Der Induktionsbeginn $A(1)$ muss bewiesen werden!
(alternativ $A(n_0)$ für eine Aussage $\forall n \geq n_0 : A(n)$)

(b) Anstatt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für $n \geq 1$ kann auch $A(n-1) \Rightarrow A(n)$ für $n \geq 2$ gezeigt werden.

Bsp: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k := 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Bew:</u> $A(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsbeginn: Sei $n=1$. Dann ist $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$, d.h. $A(1)$ ist wahr.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $A(n)$ wahr, also $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Wir müssen nun $A(n+1)$ beweisen, also $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \underset{\uparrow \text{ I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

I.V. („nach Induktionsvoraussetzung") □

Intelligenterer Beweis von Gauß, als er etwa 9 Jahre alt war (≈ 1786):

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \left[\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n \\ +\underbrace{n}_{n+1} + \underbrace{(n-1)}_{n+1} + \ldots + \underbrace{2}_{n+1} + \underbrace{1}_{n+1} \end{array}\right] = n \cdot (n+1)$$

1.7 Grundlegende Definitionen rund um Abbildungen

(a) Seien X, Y Mengen. Eine <u>Abbildung</u> $f: X \to Y$ (oder $X \xrightarrow{f} Y$) ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.
X heißt der <u>Definitionsbereich</u> von f, Y der <u>Wertebereich von f</u>.

Mit $f(X) := \{y \in Y \mid \exists x \in X: f(x) = y\}$ bezeichnen wir das <u>Bild von f</u>,
bzw. mit $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A: f(x) = y\}$ das Bild der Teilmenge $A \subseteq X$ unter f.

Mit $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ bezeichnen wir das <u>Urbild von $B \subseteq Y$</u>.

Bsp: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, dann $f(\mathbb{N}) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und

$f^{-1}(\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 8\}) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n \geq 8\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 4\}$

(b) f heißt injektiv, falls $\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f heißt surjektiv, falls $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$

f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bsp:

$$\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 1 \\ 2 \longrightarrow 2 \\ 3 \nearrow \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 2 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 2 \end{array}$$

nicht injektiv, surjektiv — injektiv, nicht surjektiv — bijektiv

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ injektiv, nicht surjektiv

$f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ nicht injektiv, aber surjektiv

$$n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$ bijektiv

(c) Ist X eine Menge, so heißt $id_X : X \to X$, $x \mapsto x$ die Identitätsabbildung.

(d) Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen, so ist die Komposition $g \circ f: X \to Z$ definiert durch $g \circ f(x) := g(f(x))$ für $x \in X$.

(e) Ist $f: X \to Y$ bijektiv, so existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \to X$ gegeben durch $f^{-1}(y) = x$ für das eindeutig bestimmte $x \in X$ mit $f(x) = y$.

1.8 Bemerkungen:

(a) Ist f bijektiv, so ist f^{-1} wohldefiniert, denn zu $y \in Y$ ex. mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ (Surjektivität). Andererseits gibt es auch nur ein einziges solches x, da aus $x, x' \in X$, $f(x) = y$ und $f(x') = y$ aufgrund der Injektivität folgt: $x = x'$.

(b) Es gilt $f \circ id_X = id_Y \circ f = f$ und $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$.

(c) Im Allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$, z.B. mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$.

(d) Urbild $f^{-1}(B)$ für $B \subseteq Y$ und Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \to X$ sind nicht zu verwechseln! Das Urbild ex. immer, die Umkehrabbildung hingegen nicht.

Bsp: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ ist nicht bijektiv und hat daher keine Umkehrabbildung. Das Urbild $f^{-1}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 8\})$ hingegen existiert.

(e) Für die Existenz der Umkehrabbildung sind Definitions- und Wertebereich entscheidend.

Bsp 1: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ hat keine Umkehrfkt, $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ hingegen schon.

Bsp 2: $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv und hat die Umkehrfkt

$f^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ hingegen ist weder injektiv noch surjektiv.

1.9

1.9 **Definition:** Eine Menge M heißt abzählbar, falls es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to M$ gibt. Ist M nicht abzählbar, so heißt die Menge überabzählbar.

1.10 **Bemerkung:** Eine Surjektion $f: \mathbb{N} \twoheadrightarrow M$ (Schreibweise) „zählt" die Elemente von M in gewisser Weise ab: Wir können M schreiben als $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, wobei $x_1 := f(1)$, $x_2 := f(2)$, … (mit Mehrfachzählungen!)
In der Mengenlehre bedeutet „Es gibt eine Surjektion von der Menge A auf die Menge B", dass A anschaulich als „größer" angesehen werden kann. Man sagt dann, dass die Mächtigkeit von A größer (oder gleich) der von B ist. Gibt es eine Bijektion zwischen zwei Mengen, so heißen sie gleichmächtig.

1.11 **Beispiele:** (a) $\emptyset$ ist abzählbar

(b) Jede endliche Menge ist abzählbar: $f: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$, $m \mapsto \begin{cases} x_m & \text{falls } m \le n \\ x_n & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $\mathbb{N}$ ist abzählbar ($\mathrm{id}: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n$ surjektiv)

(d) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar ($\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto -1$, $4 \mapsto 2$, $5 \mapsto -2$ etc.)

(e) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} := \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar:

$$\begin{array}{lllll} (1,1) \to (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ (4,1) & \dots & & \end{array}$$

Genauso $\underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{\text{endlich oft}}$

(f) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$$\begin{array}{ccccccc} -3 & -2 \leftarrow & -1 & 0 \rightarrow & 1 & 2 \rightarrow & 3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \leftarrow & \frac{0}{2} \leftarrow & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \rightarrow & \frac{0}{3} \rightarrow & \frac{1}{3} \rightarrow & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

1.12 Proposition: (a) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.
(b) Jede Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.

Beweis: (a) Sei M abzählbar und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Ist $N = \emptyset$, so ist N abzählbar. Ist hingegen $N \neq \emptyset$, so finden wir ein Element $n_0 \in N$. Da M abzählbar ist, ex. eine Surjektion $f: \mathbb{N} \twoheadrightarrow M$.

Definiere $\tilde{f}: \mathbb{N} \to N$, $n \mapsto \begin{cases} f(n) & \text{falls } f(n) \in N \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $\tilde{f}$ surjektiv, denn zu $y \in N$ ex. ein $x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = y$ (f ist ja surjektiv auch für $y \in N \subseteq M$).

Dann ist aber $\tilde{f}(x) = f(x) = y$.

(b) Sei I abzählbar und seien M_i, $i \in I$ abzählbar. Zu zeigen ist, dass dann auch $\bigcup_{i \in I} M_i$ abzählbar ist.

Da I abzählbar ist, ex. $g: \mathbb{N} \twoheadrightarrow I$ surjektiv.

Für jedes $i \in I$ ex. $f_i: \mathbb{N} \twoheadrightarrow M_i$ surjektiv, da M_i abzählbar ist.

Definiere $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} M_i$ durch $h(k,l) := f_{g(k)}(l)$.

Sei nun $x \in \bigcup_{i \in I} M_i$, d.h. $\exists i \in I: x \in M_i$. Da g surjektiv ist, ex. $k \in \mathbb{N}$ mit $g(k) = i$. Da f_i surjektiv ist, ex. $l \in \mathbb{N}$ mit $f_i(l) = x$.

Also $h(k,l) = f_{g(k)}(l) = f_i(l) = x$. Somit ist h surjektiv.

Nach Bsp. 1.11(e) gibt es nun eine Surjektion $e: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und die Komposition $h \circ e: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ ist surjektiv (nachrechnen!). □

1.13 Satz: Sei M eine Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) M ist abzählbar (d.h. $\exists f: \mathbb{N} \twoheadrightarrow M$ surjektiv)

(b) M kann bijektiv auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ abgebildet werden.

(c) M ist endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Im letzteren Fall gibt es also eine Bijektion $g: \mathbb{N} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow M$ („$\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow$ = bijektiv")

Beweis: Wir beweisen „(a) ⇒ (b) ⇒ (c) ⇒ (a)". Dann gilt also „(a) ⇔ (b) ⇔ (c)".

„(a) ⇒ (b)": Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq m < n \text{ gilt } f(n) \neq f(m)\} \subseteq \mathbb{N}$.

Dann ist die Einschränkung $f|_A: A \to M$ von f bijektiv:

Ist $y \in M$, so ex. ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = y$. Sei n_0 das kleinste solche. Es liegt also n_0 in A. Somit ist $f|_A$ surjektiv.

Seien nun $x_1, x_2 \in A$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir können annehmen, dass $x_1 \leq x_2$ ist. Gälte nun $x_1 < x_2$, so wäre $x_2 \in A$ aber für $1 \leq x_1 < x_2$ wäre $f(x_2) = f(x_1)$. Widerspruch zur Definition von A. Also gilt $x_1 = x_2$ und $f_{|A}$ ist injektiv.

Man kann nun zeigen: Da $f_{|A}$ bijektiv ist, ist auch die Umkehrabbildung $f_{|A}^{-1}: M \longrightarrow A \subseteq \mathbb{N}$ bijektiv und M kann somit bijektiv auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ abgebildet werden.

„(b) ⇒ (c)": Sei eine Bijektion $h: M \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow A$ gegeben, wobei $A \subseteq \mathbb{N}$.

Ist A endlich, so ist auch M endlich (wegen der Injektivität von h).

Ist hingegen A unendlich, so können wir A schreiben als

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ mit $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Dann ist also eine Bijektion

$$f: \mathbb{N} \to A,\ n \mapsto a_n \quad \text{und} \quad g: \mathbb{N} \to M,\ n \mapsto h^{-1}(f(n))$$ ist bijektiv:

Zu $y \in M$ ist $h(y) \in A$ und dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = h(y)$.

Also $g(n) = y$, d.h. g ist surjektiv.

Sind andererseits $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ mit $g(x_1) = g(x_2)$, so gilt $f(x_1) = f(x_2)$, da h^{-1} injektiv ist. Da auch f injektiv ist, ist $x_1 = x_2$.

„(c) ⇒ (a)": Ist M endlich, so ist M abzählbar nach Bsp. 1.11(b).

Andernfalls gibt es eine Bijektion $g: \mathbb{N} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow M$, die insbesondere surjektiv ist. $\square$

1.14 Satz: Die Potenzmenge $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \text{ ist eine Teilmenge von } \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Beweis: ↯: $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ wäre abzählbar, d.h. es gibt eine Surjektion („Diagonalfolge") $f: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{N})$. Identifiziere Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ mit Folgen

$$A \mathrel{\hat{=}} 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \ldots$$

$1 \in A$, $2 \in A$, $3 \notin A$, $4 \notin A$ …

„0 an n-ter Stelle": $n \notin A$
„1 an n-ter Stelle": $n \in A$

Schreibe
$$f(1) = 1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ \ldots$$
$$f(2) = 0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\ \ldots$$
$$f(3) = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\ \ldots$$

Definiere $B := \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \text{ ist an der } n\text{-ten Stelle gleich } 0\} \subseteq \mathbb{N}$

Da $B \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ und f surjektiv ist, ex. $m \in \mathbb{N}$ mit $f(m) = B$.

Ist nun $f(m)$ an der m-ten Stelle 0, so ist $m \in B$ nach Definition. Dann aber $f(m)$ an der m-ten Stelle 1 nach unserer Schreibweise. ↯
Ebenso: Falls $f(m)$ an der m-ten Stelle 1 ist, ↯ $\square$