§2 Die reellen Zahlen

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen hat verschiedene Eigenschaften. Wir werden diese axiomatisch einführen, also $\mathbb{R}$ durch Axiome definieren.

2.1 **Definition**: Ein Körper ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit Verknüpfungen

$$+ : K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a+b \qquad \text{„Addition"}$$

$$\cdot : K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto ab = a\cdot b \qquad \text{„Multiplikation"}$$

so dass gilt:

(i) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$ $\quad \forall a,b,c \in K$ „Assoziativität" (d.h. „Klammern ist egal")

(ii) $a+b = b+a$, $ab = ba$ $\quad \forall a,b \in K$ „Kommutativität" („Reihenfolge egal")

(iii) $\exists\, 0 \in K\ \forall a \in K: \ a+0 = a$
$\exists\, 1 \in K\ \forall a \in K: \ a\cdot 1 = a, \ 1 \neq 0$ Existenz neutraler Elemente

(iv) $\forall a \in K\ \exists\, -a \in K: \ a+(-a) = 0$
$\forall a \in K$ mit $a \neq 0\ \exists\, a^{-1} \in K: \ a\cdot a^{-1} = 1$ Existenz inverser Elemente

(v) $a(b+c) = ab+ac$ $\quad \forall a,b,c \in K$ „Distributivität"

2.2 **Axiom 1**: $\mathbb{R}$ ist ein Körper mit mindestens zwei Elementen.

2.3 **Beispiele**: Genügt Axiom 1 um $\mathbb{R}$ zu definieren? Nein, denn:

(a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper

(b) $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ mit

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ist ein Körper

Dies lässt sich verallgemeinern zu $\mathbb{F}_p = \{0,1,\dots,p-1\}$, wenn p eine Primzahl ist.

(c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper (Inverse bzgl. Multiplikation existiert nicht)

2.4 **Bemerkungen**: (a) Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.

[Sind 0 und $\tilde{0}$ neutrale Elemente bzgl. $+$, so gilt $0 \overset{2.1(iii)}{=} 0+\tilde{0} \overset{2.1(iii)}{=} \tilde{0}$]

(b) Die inversen Elemente sind eindeutig bestimmt.

[Sei $a \in K$ und $b, \tilde{b} \in K$ inverse Elemente bzgl. $+$. Dann:

$$b \overset{(iii)}{=} b+0 \overset{(iv)}{=} b+(a+\tilde{b}) = (b+a)+\tilde{b} \overset{(iv)}{=} 0+\tilde{b} \overset{(iii)}{=} \tilde{b}$$]

(c) Die Gleichung $a+x=b$ hat für jedes $a,b\in K$ eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich $x=b+(-a)=:b-a$.
Ebenso hat $a\cdot x=b$ für $a\neq 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung
$$x=b\cdot a^{-1}=:\frac{b}{a}$$

(d) Es gilt: $-0=0$, $-(-a)=a$, $-(a+b)=-a-b$, $a\cdot 0=0$,
$-a=(-1)\cdot a$, $(-a)(-b)=ab$, $(a^{-1})^{-1}=a$, $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$,
$ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$ etc.

2.5 <u>Definition</u>: Ein Körper $(K,+,\cdot)$ heißt <u>angeordnet</u>, falls es eine Teilmenge $K_+\subseteq K$ gibt mit:
$K_+\cup(-K_+)=K$, $K_+\cap(-K_+)=\{0\}$, $\forall x,y\in K_+: x+y,\ xy\in K_+$
Hierbei ist $-K_+:=\{-a\in K\mid a\in K_+\}$
Wir schreiben $a\geq 0$, falls $a\in K_+$ und $a>0$ falls zusätzlich $a\neq 0$.
Wir schreiben $a\geq b$, falls $a-b\in K_+$, $a>b$, falls zusätzlich $a\neq b$.
Wir schreiben $a<b$, falls $b>a$ und $a\leq b$ falls $b\geq a$.

2.6 <u>Axiom 2</u>: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.

2.7 <u>Beispiele</u>: Auch Axiom 2 genügt nicht:
(a) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist ein angeordneter Körper mit $\mathbb{Q}_+:=\{q=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\mid a\in\mathbb{N}_0,\ b\in\mathbb{N}\}$
(b) $\mathbb{F}_2$ (und allgemein $\mathbb{F}_p$) ist nicht angeordnet.
[Es gilt $-0=0$ und $-1=1$ in $\mathbb{F}_2$. Somit ist $-(\mathbb{F}_2)_+=(\mathbb{F}_2)_+$ und daher $(\mathbb{F}_2)_+=(\mathbb{F}_2)_+\cup(-(\mathbb{F}_2)_+)=\mathbb{F}_2$. Aber $\mathbb{F}_2\cap(-\mathbb{F}_2)=\mathbb{F}_2$.
Kann also keine Teilmenge $(\mathbb{F}_2)_+\subseteq\mathbb{F}_2$ wie in 2.5 finden.

2.8 <u>Bemerkungen</u>: (a) Für $a\in K$ gilt $a>0$ oder $a=0$ oder $a<0$.
[$a\in K=K_+\cup(-K_+)$, also $a\in K_+$ oder $-a\in K_+$.
1. Fall: $a\in K_+$ und $-a\notin K_+$. Dann $a\neq 0$ (denn $0\in K_+\cap -K_+$), also $a>0$. Etc.
(b) $a\leq b$ und $b\leq a \Rightarrow a=b$ [$a-b,\ -(a-b)\in K_+ \Rightarrow a-b\in K_+\cap(-K_+)=\{0\}$]

(c) $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$ „Transitivität"
$a\leq b$ und $b\leq c \Rightarrow a\leq c$

(d) $a<b \Rightarrow \forall c\in K: a+c<b+c$ (ebenso für „$\leq$") $\left[(b+c)-(a+c)=b+c+(-a)+(-c) = b-a \in K_+\right]$

(e) $a<b$ und $c>0 \Rightarrow ac<bc$

(f) $a<b \Rightarrow -a>-b$

(g) $0\leq a<b$ und $0\leq c<d \Rightarrow ac<bd$

(h) $a>0 \Rightarrow a^{-1}>0$, $0<a<b \Rightarrow a^{-1}>b^{-1}$

(i) $a^2\geq 0 \quad \forall a\in K$ (insbes. $1>0$)
$\left[\begin{array}{l} 1.)\ a>0:\ a^2=a\cdot a>0 \text{ nach (e)} \\ 2.)\ a<0:\ -a>0 \text{ und } a^2=(-a)^2 \overset{1.)}{>} 0 \\ 3.)\ a=0:\ a^2=0\cdot 0=0\geq 0 \end{array}\right.$

2.9 Satz: Sei K ein angeordneter Körper. Dann kann $\mathbb{N}$ in K eingebettet werden per $\Phi: \mathbb{N}\to K$, d.h. Φ ist injektiv,
$n \mapsto \underbrace{1+\dots+1}_{n\text{-mal}} =: n_K$

Es gilt $(n+m)_K = n_K+m_K$, $(nm)_K = n_K m_K$, $n_K>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Beweis: $n_K>0$ nach Def. 2.5, da $1\in K_+$ ($1=1\cdot 1\geq 0$ nach 2.8(i)).
Dann vollst. Induktion: I.A.: $1_K\in K_+$ also $1>0$, I.S. $(n\to n+1)$: $(n+1)_K = n_K+1>0$ nach I.V. und Def. 2.5.

Injektivität: Seien $m,n\in\mathbb{N}$ so dass $\Phi(m)=\Phi(n)$. Können annehmen $m\geq n$. Annahme: $m>n$. Dann $0=m_K-n_K=(m-n)_K$, aber $l_K>0 \ \forall l\in\mathbb{N}$ ↯ □

2.10 Korollar: In jedem angeordneten Körper finden wir Kopien von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

Beweis: Nach 2.9 kann $\mathbb{N}$ mit $\Phi(\mathbb{N})\subseteq K$ identifiziert werden.
Definiere dann $\mathbb{Z}_K := -\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}\subseteq K$ und
$\mathbb{Q}_K := \{\frac{p}{q}\in K \mid p,q\in\mathbb{Z}_K, q\neq 0\}$. □

2.11 Satz (Bernoullische Ungleichung): Sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$ mit $x \geq 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis: Induktion nach n.

I.B. ($n=1$): Für $n=1$ ist $(1+x)^n = 1+x = 1 + 1 \cdot x$, also wahr.

I.S. ($n \to n+1$): Gelte $(1+x)^n \geq 1+nx$. Wir zeigen:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{>0} \overset{\text{I.V., 2.8(e)}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\substack{\geq 0 \\ 2.8(i)}} \geq 1 + (n+1)x$$

□

2.12 Def./Anm.: Sei K ein angeordneter Körper. Zu $a \in K$ setzen wir

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \qquad \text{„(Absolut)betrag"}$$

2.13 Bemerkung. Eigenschaften des Absolutbetrags:

(a) $|-a| = |a|$

(b) $|a| \geq 0$

(c) $|ab| = |a||b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(d) $|a| = 0 \iff a = 0$

(e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung

Beweis für (e): Es gilt $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$, ebenso für b. Also $a+b \leq |a|+|b|$ und $-a-b \leq |a|+|b|$. Da $-a-b = -(a+b)$ ist $|a|+|b| \geq |a+b|$ in beiden Fällen $a+b \geq 0$ und $a+b < 0$. □

2.14 Def./Anm.: Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch, falls zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$.

2.15 Axiom 3: $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper.

2.16 Bemerkung: In einem archimedisch angeordneten Körper gilt:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N: \frac{1}{n} < \varepsilon$ [Da K archimedisch ex. $N > \frac{1}{\varepsilon}$ und dann $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \; \forall n \geq N$]

(b) Ist $x \geq 0$ und $0 \leq x \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, so ist $x = 0$.

[~~A~~: $x > 0$. Dann ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < x$ nach (a). Für $\varepsilon := \frac{1}{N}$ also ↯]

(c) Ist $b>1$, so gilt: $\forall R\in K\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N:\ b^n>R$

Ist $0<q<1$, so gilt: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N:\ q^n<\varepsilon$.

⌜ 1) Setze $x:=b-1>0$ und sei $R\in K$ gegeben. Da K archimedisch ist, ex. $N\in\mathbb{N}$ mit $\frac{R}{x}<N$, also $R<Nx$.

Nach 2.11 ist dann $b^N=(1+x)^N\geq 1+Nx>Nx>R$.

Für $n\geq N$ also $b^n=\underbrace{b^{n-N}}_{\geq 1}b^N\geq b^N>R$.

2) Sei $0<q<1$ und $\varepsilon>0$. Dann ist $b:=\frac{1}{q}>1$ und zu $R:=\frac{1}{\varepsilon}\in K$ ex. $N\in\mathbb{N}$ mit $b^n>R$ $\forall n\geq N$ nach 1).

⌞ Also $q^n=\left(\frac{1}{b}\right)^n<\frac{1}{R}=\varepsilon$ für alle $n\geq N$. □

2.17 <u>Beispiel</u>: $\mathbb{Q}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper.

Nach 2.10 ist $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, also „$\neq$"? Brauche noch ein weiteres Axiom. Dafür brauchen wir den Formalismus der Folgen.