§ 3 Folgen

3.1 Definition: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung
$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Schreibe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$

Folgen müssen nicht mit dem Index 1 beginnen, auch Folgen der Form $(a_n)_{n\geq n_0}$ sind möglich.

3.2 Beispiele:
(a) $a_n \equiv 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(2,2,2,2,\dots)$
(b) $a_n = n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(1,2,3,4,\dots)$
(c) $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
(d) $a_n = (-1)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

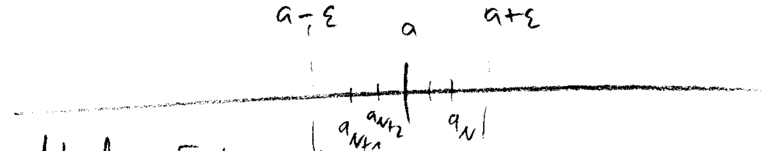
3.3 Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent mit Grenzwert $a\in\mathbb{R}$ (oder „konvergiert gegen a"), falls

$$\forall \varepsilon>0 \;\exists N\in\mathbb{N}\; \forall n\geq N: \; |a-a_n|<\varepsilon$$

Schreibe $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ für $n\to\infty$

(typischer Fehler: schreibe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nur falls ein Grenzwert existiert!)

Typischerweise ist ε sehr klein, d.h. ab dem Index N liegen alle Folgenglieder nah bei a



Andernfalls heißt die Folge divergent

3.4 Beispiele:

(a) $a_n \equiv 2$ konvergiert gegen 2
[Für jedes $\varepsilon>0$ und für $N=1$ gilt: $|2-a_n| = 0 < \varepsilon$, $n\geq N$]

(b) $a_n = n$ konvergiert nicht, divergiert also
{ Für $a\in\mathbb{R}$ ist $|a-n| \overset{2.13(f)}{\geq} n-|a|$ beliebig groß
Also $\forall a\in\mathbb{R}\; \exists \varepsilon>0\; \forall N\in\mathbb{N}\; \exists n\geq N: \; |a-a_n| \geq \varepsilon$

(c) $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0

[Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N so, dass $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dann $|0 - a_n| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$ $\forall n \ge N$]

(d) $a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht (also nicht $\lim a_n$ schreiben)

⌈ A: $a \in \mathbb{R}$ wäre Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Betrachte $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$.
Nach der Konvergenz ex. $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge N$: $|a_n - a| < \frac{1}{2}$.
Also für alle $n \ge N$:

⌊ $2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}\ 2.13(e)}{\le} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ↯

3.5 Proposition: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to a'$ für $n \to \infty$.
Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ex. also $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit:

$\forall n \ge N_1 \quad |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n \ge N_2 \quad |a' - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ Setze $N := \max(N_1, N_2)$.

Dann gilt: $|a - a'| = |(a - a_N) + (a_N - a')| \overset{\Delta\text{-Ungl.}\ 2.13(e)}{\le} |a - a_N| + |a_N - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Nach 2.16(b) also $|a - a'| = 0$, d.h. $a = a'$. □

3.6 Bemerkung: (a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so ex. nach Def. 3.3 ein $N \in \mathbb{N}$ mit: $\forall n \ge N: |a_n - a| < \varepsilon$. Statt N kann jedes beliebige $N' \ge N$ gewählt werden. Es gilt dann immer noch: $\forall n \ge N': |a_n - a| < \varepsilon$.

(b) Konvergenz ist eine Aussage über das Verhalten im Unendlichen. Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bleibt daher konvergent mit demselben Grenzwert, wenn endlich viele Folgenglieder abgeändert werden. Insbesondere haben $(a_n)_{n\ge n_0}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert.

⌈ Sei $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die abgeänderte Folge und $K \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n = a'_n$ für alle $n \ge K$. Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zeige: $a'_n \to a$, $n \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$, $n \ge N$.

⌊ Für $n \ge \max(N, K)$ gilt dann: $|a - a'_n| = |a - a_n| < \varepsilon$. Somit $a'_n \to a$.

3.7 Proposition: Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ und $s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

Motivation: 3.8

Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-x}$.

Beweis: Von Blatt 1 ist bekannt: $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

(Wie kommt man auf diese Formel?
$$s_n(1-x) = \begin{matrix} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \\ - x - x^2 - \ldots - x^n - x^{n+1} \end{matrix} = 1 - x^{n+1}$$
)

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x|^{n+1} < \varepsilon \cdot (1-x)$ $\forall n \geq N$.
(2.16(c))

Für $n \geq N$ also: $\left|s_n - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = |x^{n+1}| \cdot \frac{1}{1-x} < \varepsilon$. $\square$

3.8 Beispiele:

(a) $x = \frac{1}{2}$. $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$. $\lim_{n\to\infty} s_n \overset{3.7}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(b) $x = \frac{1}{3}$. $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}$. $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

(c) Betrachte $z := 0,\overline{37} = 0,373737\ldots = \frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \ldots$

Mit $t_n := 37\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^{n+1}}\right) = \frac{37}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100^n}\right)$, $x := \frac{1}{100}$

gilt: $z = \lim_{n\to\infty} t_n = \frac{37}{100} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{37}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{37}{99}$.

Hierbei benutzt: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$. (direkt beweisen oder Satz 3.12 abwarten)

3.9 Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt nach oben beschränkt, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sie heißt nach unten beschränkt, falls entsprechend $a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die Folge heißt beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

3.10 Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon := 1$.
Dann ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$.
Setze $K_1 := \min\{a_1, \ldots, a_{N-1}\}$, $K_2 := \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}\}$, also das kleinste bzw. das größte Element der Menge $\{a_1, \ldots, a_{N-1}\}$.
(Definition macht nur für endliche Mengen Sinn, sonst siehe §7)

Also gilt: $K_1 \le a_n \le K_2$ für $n < N$
$a-1 \le a_n \le a+1$ für $n \ge N$

Also: $\min\{K_1, a-1\} \le a_n \le \max\{K_2, a+1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

3.11 <u>Bemerkung</u>: (a) Im Beweis benutzt: Seien $a, x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
Dann ist $\underset{(\le)}{|x-a| < \varepsilon} \iff a - \varepsilon \underset{(\le)}{<} x \underset{(\le)}{<} a + \varepsilon$

(b) Die Umkehrung von Satz 3.10 ist falsch: Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.
(c) (a_n) beschränkt $\iff$ $|a_n| \le K$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3.12 <u>Satz</u>: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen. Es gilt:
Motivation: 3.13
(a) $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
(b) $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
(c) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
(d) $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim a_n - b_n = \lim a_n - \lim b_n$
(e) Ist $\lim b_n \ne 0$, so ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \ne 0$ $\forall n \ge n_0$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\ge n_0}$ ist konvergent mit Limes $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\ge n_0}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

<u>Beweis</u>: Setze $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$.
(a) Sei $\varepsilon > 0$ und $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so dass $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \ge N_1$
$|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \ge N_2$

Setze $N := \max(N_1, N_2)$. Also $|(a+b) - (a_n+b_n)| \overset{\Delta\text{Ugl.}}{\le} |a-a_n| + |b-b_n| < \varepsilon$, $n \ge N$.

(b) Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ex. nach Satz 3.10 ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \le K$ für alle $n \ge N$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann ex. $N \in \mathbb{N}$ mit
$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2|b|+1}$, $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$ $\forall n \ge N$ ($N = \max(N_1, N_2)$ analog zu (a)).
Für $n \ge N$: $|(ab) - (a_n b_n)| = |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \overset{\Delta\text{Ugl.}}{\le} |(a-a_n)b| + |a_n(b-b_n)|$
$\le |a-a_n||b| + \underbrace{|a_n|}_{\le K}|b-b_n| < \frac{\varepsilon|b|}{2|b|+1} + \frac{\varepsilon K}{2K} < \varepsilon$

(c) Setze $b_n :\equiv \lambda$. Also $(\lambda a_n) = (a_n b_n)$ und dann (a).

(d) Für $\lambda = -1$ ist $\lim(-b_n) = -\lim b_n = -b$
und $a_n - b_n = a_n + (-b_n) \to a - b$ für $n \to \infty$ nach (a).

(e) Zu $\varepsilon := |b| > 0$ ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \varepsilon = |b|$ für $n \geq n_0$.
Also $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, da sonst $|b - 0| < |b|$ wäre.
Somit ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ wohldefiniert.
1. Fall: $a_n \equiv 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also z.z.: $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, $n \to \infty$
Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2$ und $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für $n \geq N$.

Aus der zweiten Abschätzung folgt $|b_n| > |\frac{b}{2}|$.
(nach U.11(a): $b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$. Für $b > 0$ ist $\frac{b}{2} < b_n$
$b < 0$: $b_n < \frac{b}{2} < 0$)

Daher $\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b b_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2 \cdot \left|\frac{1}{b}\right| \underbrace{\left|\frac{1}{b_n}\right|}_{< \left|\frac{2}{b}\right|} < \varepsilon$, $n \geq N$.

2. Fall: (a_n) beliebig. Dann $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b}$ nach (b). $\square$

3.13 <u>Beispiel</u>: (a) $a_n = \frac{n+1}{n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 1$, $n \to \infty$

(b) $b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = a_n \cdot a_n \to 1$ nach (a).

(c) $c_n = \frac{5n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 10n} = \frac{5 + \overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}}{3 + \underbrace{\frac{10}{n}}_{\to 0}} \to \frac{5}{3}$, $n \to \infty$

3.14 <u>Satz</u>:
(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $b_n' \leq a_n \leq b_n$
für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n' = b$.
Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert b.
(„Sandwichlemma")

Beweis: (a) Sei $\varepsilon > 0$. Setze $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$.
Es ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon \le a_N$, $b_N \le b + \varepsilon$ (Bem. 3.11(a))
Also $a - \varepsilon \le a_N \le b_N \le b + \varepsilon$, d.h. $a - b \le 2\varepsilon$.
Da ε beliebig war, gilt $a - b \le 0$ nach 2.16(b) (archimed. Axiom).
$\Rightarrow a \le b$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $b - \varepsilon < b_n'$, $b_n < b + \varepsilon$ $\forall n \ge N$ (Bem. 3.11)

Für $n \ge N$ ist also $b - \varepsilon < b_n' \le a_n \le b_n < b + \varepsilon$, d.h. $|a_n - b| < \varepsilon$ (Bem. 3.11). $\square$

3.15 Bemerkung: (a) In Satz 3.14 genügen Ungleichungen für $n \ge n_0$.
(b) Sind (a_n), (b_n) konvergent mit $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, so folgt nicht $\lim a_n < \lim b_n$ (nur $\lim a_n \le \lim b_n$)
Bsp: $a_n := \frac{1}{n^2} < b_n := \frac{1}{n}$ für $n \ge 2$, aber $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

3.16 Beispiel: Was ist der Grenzwert von $a_n := \frac{n}{2^n}$ bzw. von $a_n := n \cdot x^n$, $0 < x < 1$?

Weiß: (i) $\exists q \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < q < 1$ (z.B. $q := x + \frac{1-x}{2}$)
(ii) $q^n \to 0$ für $n \to \infty$ nach archimed. Axiom bzw. 2.16(c).
(iii) $\frac{n+1}{n} x \to x$ für $n \to \infty$, da $\frac{n+1}{n} \to 1$ nach 3.13(a) (und 3.12(c)))

Nach (iii) ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{n+1}{n} x \le q$ für $n \ge n_0$.
Setze $\lambda := \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$ und $b_n := q^n \lambda$, $b_n' :\equiv 0$. Dann gilt
$b_n' \le a_n \le b_n$ für alle $n \ge n_0$, denn für $n \ge n_0$ ist

$$0 \le a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \le \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-n_0)\text{ mal}} \cdot a_{n_0} = q^n \cdot \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} = b_n$$

(ist $k \ge n_0$, so ist $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)x^{k+1}}{k x^k} = \frac{k+1}{k} x \le q$)

Nach (ii) ist $b_n \to 0$ und $b_n' \to 0$ für $n \to \infty$ $\overset{3.14}{\Longrightarrow}$ $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

3.17 Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt <u>bestimmt divergent gegen $+\infty$</u> [oder $-\infty$], falls

$$\forall K\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N:\quad a_n>K\quad [\text{oder } a_n<K]$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ bzw. $a_n\to\infty$, $n\to\infty$.

3.18 Beispiele: (a) $a_n=n$ ist bestimmt divergent gegen ∞

(b) $a_n=-n^2$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$

(c) $a_n=(-1)^n$ ist nicht bestimmt divergent, sondern bloß divergent

(d) $a_n=(-1)^n n$ ist nicht bestimmt divergent, sondern bloß divergent

3.19 Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
Dann gilt: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty \iff \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

Beweis: $\lim a_n=\infty$

$$\iff \forall K\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: a_n>K$$

$$\iff \forall K>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: a_n>K$$

$$\iff \forall K>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \frac{1}{a_n}<\frac{1}{K}$$

$$\overset{\varepsilon=\frac{1}{K}}{\iff} \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \frac{1}{a_n}<\varepsilon\quad \left(\text{sogar } -\varepsilon<\frac{1}{a_n}<\varepsilon\right)$$

$$\iff \lim\frac{1}{a_n}=0$$

$\square$

3.20 Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $s_n:=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ der Partialsummen heißt <u>unendliche Reihe</u> und wird mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\lim_{n\to\infty} s_n.$$

Man kann auch die Partialsummen $s_n=\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$ von $(a_n)_{n\geq n_0}$ bilden und die Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ betrachten.

3.21 Beispiel:

(a) Mit $a_k := x^k$ ist $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (Prop. 3.1)
$x \in \mathbb{R}, |x| < 1$ „geometrische Reihe"

(b) Was ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$?

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}}_{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}} + \frac{1}{3\cdot 4}}_{\frac{1}{3}(2+\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}} + \frac{1}{4\cdot 5}}_{\frac{1}{4}(3+\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}} + \ldots$$

Beweise mit Induktion $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Da $S_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} \longrightarrow 1$, folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

(c) Viel schwieriger zu zeigen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (explizite Berechnung von π^2 durch $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

(d) Was ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$? „harmonische Reihe"

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

Für $n \geq 2^m$ gilt also $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \underset{\text{Induktion}}{\geq} 1 + m \cdot \frac{1}{2}$

Somit ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

Frage: Für welche $\alpha \in [0,\infty)$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergent?

klar: für $\alpha \geq 2$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$, $n \to \infty$

gerech. Mittelwert

für $0 \leq \alpha \leq 1$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty$, $n \to \infty$

aber $\alpha \in [1,2]$?

(e) „alternierende harmonische Reihe" $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2$