§5 Konvergenzkriterien für Reihen

Wir hatten gesehen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, während $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Wie sieht man so etwas? Entwickle nun Werkzeuge.

5.1 <u>Satz (Cauchy-Kriterium)</u>: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N$ mit $n < m$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$.

<u>Beweis</u>: Mit den Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ gilt die Bedingung g.d.w. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. □

5.2 <u>Satz (Trivialkriterium)</u>: Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

<u>Beweis</u>: $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon$ für $n > N$ nach 5.1. □

5.3 <u>Bemerkung</u>: Mit diesem Kriterium kann man ausschließen, dass eine Reihe konvergiert, sobald $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert (beispielsweise für $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k!}\right)$), aber $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ genügt nicht, siehe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

5.4 <u>Satz</u>: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

<u>Beweis</u>: $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$, also ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Damit: $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\overset{4.18}{\underset{3.10}{\Longleftrightarrow}}$ $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. □

5.5 <u>Beispiel</u>: (a) Wir hatten in 3.21(d) gesehen, dass die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ unbeschränkt sind $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht konvergent.

(b) Wir hatten in 3.21(c) kennengelernt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Dafür hatten wir keinen Beweis gesehen und werden auch jetzt keinen sehen. Aber immerhin können wir zeigen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{n-1}{n} < 2$$

Also $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und $s_n \geq 0 \ \forall n \overset{5.4}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Den Wert können wir hingegen immer noch nicht berechnen.

5.6 Satz (Majorantenkriterium): Ist $|a_n| \le |c_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=n+1}^{m} |c_k| < \varepsilon$ für $m > n \ge N$ (ex. nach 5.1).

Also gilt $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\le} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n+1}^{m} |c_k| < \varepsilon$ für $m > n \ge N$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. nach 5.1.

Mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n := \sum_{k=1}^{n} |c_k|$ gilt $|s_n| \le t_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underset{\text{inverse }\Delta\text{-Ugl.}}{\overset{3.14(a)}{\Longrightarrow}}$ $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$

(Benutzt: $x_n \to x \Rightarrow |x_n| \to |x|$, denn $\big||x| - |x_n|\big| \le |x - x_n| \to 0$) □

5.7 Beispiel: Hier eine formale Begründung für 3.21(d): $a_n := \frac{1}{n^\alpha} \le c_n := \frac{1}{n^2}$ falls $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 2$ (sogar für $\alpha \in (2,\infty)$) $\overset{5.6,\,5.5}{\Longrightarrow}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert.

5.8 Definition: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

5.9 Proposition: Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Beweis: $|a_n| \le |a_n|$, also 5.6 mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ als Majorante.

5.10 Satz (Quotientenkriterium):

(a) Gibt es ein $0 < \vartheta < 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \vartheta$ $\forall n \ge n_0$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(b) Gibt es ein $\vartheta \ge 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge \vartheta$ $\forall n \ge n_0$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis: (a) Setze $a_n' := a_{n_0+n}$. Dann

$$|a_n'| = |a_{n_0}| \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right|}_{\le \vartheta} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{n_0+n}}{a_{n_0+n-1}}\right|}_{\le \vartheta} \le |a_{n_0}| \cdot \vartheta^n =: c_n$$

Da nun $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = |a_{n_0}| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^k$ konvergiert nach 3.7 (gegen $|a_{n_0}| \cdot \left(\frac{1}{1-\vartheta} - 1\right)$), konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k' = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$ und somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n_0} a_k}_{\text{endlich}} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$.

(b) $|a_{n+1}| \ge \vartheta |a_n| \ge |a_n| \ge \ldots \ge |a_{n_0}|$ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge. □

5.11 Koroller: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert.

Dann:
$\alpha < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut
$\alpha = 1$: keine Aussage (beides möglich)
$\alpha > 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

Beweis: Blatt 6.

5.12 Satz (Wurzelkriterium):
(a) Gibt es ein $0 < \vartheta < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \vartheta \ \forall n \geq n_0$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(b) Gibt es ein $\vartheta \geq 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \vartheta \ \forall n \geq n_0$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis: (a) $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \vartheta \Rightarrow |a_n| \leq \vartheta^n$, also $\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta^k$ konvergente Majorante.
(b) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \vartheta \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1 \Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge, dann 5.2. □

5.13 Koroller: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert.

Dann:
$\alpha < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut
$\alpha = 1$: keine Aussage (beides möglich)
$\alpha > 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

Beweis: Blatt 6.

5.14 Beispiel: Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{2^k}$ für festes $p \in \mathbb{N}$.

Konvergenz nach Quotientenkriterium: $\dfrac{\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}}}{\frac{n^p}{2^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$, dann 5.11

Konvergenz nach Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{\left|\frac{n^p}{2^n}\right|} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^p \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$, dann 5.13.

5.15 **Satz (alternierende Reihen):** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$.

Beweis: Es gilt:
- $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt
- $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt.

Hierbei $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$.

Beweis der Beh.: $s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \overset{(ii)}{\geq} 0 \Rightarrow (s_{2n})$ mon. wachs.

Genauso ist $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mon. fallend.

$s_{2n+1} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+1} \overset{(i)}{\geq} 0$

$\Rightarrow \quad s_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq s_1$ also beide beschränkt.

□ (Beh.)

Nach 4.18 ex. $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$, $s' := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

Da nun $s_{2n} \leq s_{2n+1}$, ist $s \leq s'$ (3.14)

$s_{2n} \to s$, $s_{2n+1} \to s'$

also $0 \leq s' - s \overset{4.17}{\leq} s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow{(iii)} 0 \overset{3.14}{\Rightarrow} s = s'$.

Also $s_n \to s$, $n \to \infty$ □

5.16 **Beispiel:** Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert, jedoch keine absolute Konvergenz, d.h. sie ist <u>bedingt konvergent</u>.