§ 7 Supremum und Infimum

Ist $M=\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ eine endliche Menge, so ist klar, was $\max(M)$ sein soll, definiere nämlich $\max(M):=$ größtes Element von M.
Ist M hingegen unendlich, so ist dies schon nicht mehr so klar.

7.1 Def./Anm.: Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(a) D heißt nach oben [bzw. nach unten] beschränkt, falls es ein $K\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $x\le K$ [bzw. $x\ge K$] $\forall x\in D$.
D heißt beschränkt, falls D nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h. falls es ein $K\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $-K\le x\le K$ gilt.

(b) Eine Zahl $K\in\mathbb{R}$ heißt Supremum [bzw. Infimum] von D, falls K die kleinste obere Schranke [bzw. die größte untere Schranke] von D ist, d.h. falls $x\le K$ $\forall x\in D$ und $K\le K'$ für alle oberen Schranken K' von D [bzw. $x\ge K$ $\forall x\in D$ und $K\ge K'$ für alle unteren Schranken K' von D].
Schreibe dann $\sup D=K$ [bzw. $\inf D=K$].

7.2 Satz: $\mathbb{R}$ besitzt die Supremumseigenschaft, d.h. jede nichtleere nach oben [bzw. nach unten] beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum [bzw. Infimum].
(Diese Eigenschaft ist sogar äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom bzw. dem Intervallschachtelungsprinzip.)

Beweis (für Supremum, Infimum analog): Sei $\emptyset\neq D\subseteq\mathbb{R}$ nach oben beschränkt.
Konstruiere induktiv Intervalle $[a_n,b_n]$, so dass
- a_n keine obere Schranke von D
- b_n obere Schranke von D
- $b_n-a_n=2^{-n}$

Sei dazu $m\in\mathbb{Z}$ die kleinste Zahl, so dass m obere Schranke von D ist, $m-1$ aber nicht (ex. nach dem archimed. Axiom).
Setze $a_0:=m-1$, $b_0:=m$. Sei $[a_n,b_n]$ nun schon konstruiert.
Setze
$$[a_{n+1},b_{n+1}]:=\begin{cases}\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right] & \text{falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ keine obere Schranke}\\ \left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{sonst}\end{cases}$$

Somit sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone, beschränkte Folgen mit $s := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{s\}$.

Ist nun $x \in D$, so ist $x \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $x \le s$, also ist s obere Schranke.

Ist $K' \in \mathbb{R}$ eine weitere obere Schranke, so ist $K' \ge a_n \; \forall n \Rightarrow K' \ge \lim a_n = s$. □

7.3 <u>Definition</u>: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben [bzw. unten] beschränkt.

Ist $\sup D \in D$, so heißt $\sup D$ das <u>Maximum</u> von D.

Ist $\inf D \in D$, so heißt $\inf D$ das <u>Minimum</u> von D.

Ist D nicht nach oben [bzw. unten] beschränkt, schreibe $\sup D = \infty$ [$\inf D = -\infty$].

7.4 <u>Bemerkung</u>: Gilt $\sup D \notin D$, so existiert immerhin eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to \sup D$ ($D \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset$ im Beweis von 7.2, wähle $x_n \in D \cap [a_n, b_n]$.).

Ist $\sup D = +\infty$, so ex. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, $x_n \to \infty$. Ebenso für $\inf D$.

7.5 <u>Beispiele</u>: (a) $D = [a, b]$, $\sup D = \max D = b$

(b) $D = [a, b)$, $\sup D = b$, aber kein Maximum

(c) $D = \{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat $\inf D = 1$, denn $1 \le \sqrt[n]{n} \; \forall n$ und $\sqrt[n]{n} \to 1$. Ist nämlich $K \le \sqrt[n]{n} \; \forall n$, so ist auch $K \le \lim \sqrt[n]{n} = 1$, also ist 1 die größte untere Schranke.

7.6 <u>Definition</u>: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Definiere

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k \mid k \ge n\}\right) \qquad \text{„\underline{Limes superior}"}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{a_k \mid k \ge n\}\right) \qquad \text{„\underline{Limes inferior}"}$$

Hierbei sind die Werte $+\infty$ und $-\infty$ zugelassen.

7.7 <u>Lemma</u>: Zu jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$, und es gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.

<u>Beweis</u>: $y_n := \sup\{a_k \mid k \ge n\}$ ist monoton fallend und $x_n := \inf\{a_k \mid k \ge n\}$ monoton wachsend. Außerdem $x_n \le y_n$. Hierbei sind auch $y_n \equiv \infty$ und $x_n \equiv -\infty$ möglich (konstante Folgen). □

7.8 Beispiel: (a) $a_n = (-1)^n$. $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$

(b) $(a_n) = (-5, 5, -4, 4, -3, 3, -2, 2, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

$\limsup a_n = 1$, $\liminf = -1$

(c) $a_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$. $\limsup a_n = 1$, $\liminf = -1$

(d) $a_n = (-1)^n n$. $\limsup a_n = \infty$, $\liminf = -\infty$

7.9 Proposition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ der größte HP von (a_n).

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so ist $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der kleinste HP von (a_n).

Beweis: (a) Betrachte $y_n := \sup\{a_m \mid m \geq n\} < \infty$. Also $y_n \to \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Wähle induktiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $n_1 < n_2 < \dots$ und $y_k - \frac{1}{k} \leq a_{n_k} \leq y_k$ für $n_k \geq k$ (ex., da $y_k - \frac{1}{k}$ kein sup).

$y_k - \frac{1}{k} \to \limsup$, $y_k \to \limsup$ $\Rightarrow a_{n_k} \to \limsup a_n$, $k \to \infty$.

Ist nun b irgendein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ex. eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to b$, $k \to \infty$. Dann aber $a_{n_k} \leq y_{n_k}$ $\forall k$ $\Rightarrow b \leq \limsup a_n$, d.h. $\limsup a_n$ größter HP.

$a_{n_k} \to b$, $y_{n_k} \to \limsup a_n$

(b) analog.

$\square$

7.10 Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Es gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: „$\Leftarrow$" Ist $\limsup a_n = \liminf a_n$, so gilt mit (x_n) und (y_n) wie in 7.7:

$x_n \leq a_n \leq y_n$ $\forall n$ $\Rightarrow \lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$

$x_n \to \liminf a_n = \limsup a_n \leftarrow y_n$

„$\Rightarrow$" Ist (a_n) konvergent so konvergiert auch jede Teilfolge gegen $\lim a_n$, insbesondere jene aus 7.9.

$\square$