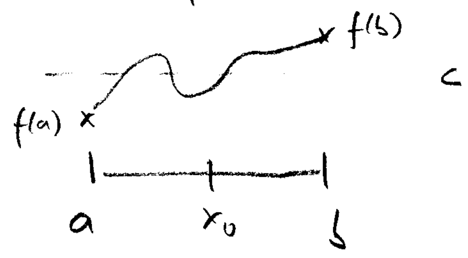
§ 9 Sätze über stetige Funktionen

9.1 Satz (Zwischenwertsatz): Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(a) < c < f(b)$.
Dann gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = c$.



Beweis: Setze $x_0 := \inf\{x \in [a,b] \mid f(x) \geq c\}$ (ex., da $f(b) > c$).
Also ex. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in [a,b]$, $z_n \to x_0$ und $f(z_n) \geq c$ $\forall n$.
Da f stetig ist, gilt $f(z_n) \to f(x_0)$. Wegen $f(z_n) \geq c$ also $f(x_0) \geq c$.
Umgekehrt, sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a,b]$ mit $y_n \to x_0$ und $y_n < x_0$ $\forall n$.
(Ex., da $x_0 \geq a$ nach Definition und $x_0 \neq a$, da $f(x_0) \geq c > f(a)$. Also $x_0 > a$.)
Nach der Definition von x_0 ist $f(y_n) < c$ $\forall n$, nach der Stetigkeit also $f(y_n) \to f(x_0)$ mit $f(x_0) \leq c$ (3.14). Also $f(x_0) = c$. □

9.2 Korollar: Jede positive reelle Zahl $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$ besitzt eine n-te Wurzel (für $n \geq 2$).

Beweis: Resultat bekannt aus 4.19, jetzt aber kürzerer Beweis.
Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ ist stetig. Setze $a := 0$ und wähle $b > 0$ so groß, dass $b^n > z$. Dann $f(a) < z < f(b) \overset{9.1}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in [a,b]$ mit $x_0^n = z$. □

9.3 Korollar: Jede Polynomfunktion ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Betrachte $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, n ungerade, $a_n \neq 0$.
o.E. $a_n > 0$ (betrachte sonst $-p$).
Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} x^n\Big(a_n + \underbrace{a_{n-1}\frac{1}{x}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{a_0 \frac{1}{x^n}}_{\to 0}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \quad \text{da } n \text{ ungerade}$$

Also ex. $a < 0 < b$ mit $p(a) < 0 < p(b)$. Dann 9.1. □

9.4 Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls ihr Bild $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ beschränkt ist, d.h. falls ein $M > 0$ ex., so dass $-M \le f(x) \le M$ für alle $x \in D$.

9.5 Satz: Jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Infimum und Supremum auf $[a,b]$ an, d.h. es gibt $p, q \in [a,b]$, so dass
$f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und $f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.
Mit anderen Worten: $\sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ist ein Maximum, $\inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ein Minimum.

Beweis: Wir beweisen nur den Fall des Supremums (Infimum analog).
Setze $s := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Also ex. eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a,b]$, so dass $f(x_n) \to s$. Das bedeutet nicht, dass auch (x_n) konvergiert!
Nach Bolzano-Weierstraß finden wir jedoch eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die konvergent ist. Setze $p := \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in [a,b]$. Da f stetig ist, gilt dann $f(x_{n_k}) \to f(p)$. Andererseits $f(x_{n_k}) \to s$. Nach der Eindeutigkeit des Grenzwerts also $f(p) = s$.
(Wo wurde benutzt, dass $[a,b]$ abgeschlossen und beschränkt ist?) $\square$

9.6 Bemerkung: Obiger Satz ist falsch auf einem nicht abgeschlossenen Intervall $(a,b]$ oder (a,b) oder $[a,b)$. Z.B. nimmt $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ das Infimum 0 nicht an. Die Funktion $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist weder beschränkt, noch nimmt sie Infimum oder Supremum an.
Insofern ist 9.5 nicht bloß eine Aussage über stetige Funktionen, sondern auch über abgeschlossene Intervalle. Wir werden noch häufiger sehen, wie wichtig die Struktur des Definitionsbereichs für das Verhalten der Funktion ist.

9.7 Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y\in D$ mit $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

9.8 Lemma: Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.

Beweis: Wie vergleichen wir die Definitionen? Durch die Position von „$\forall x\in D$":

stetig auf D: $\forall x\in D\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall y\in D$ mit $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

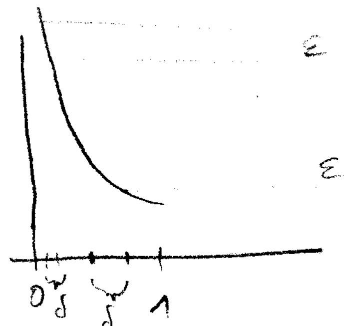
glm. stetig: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D\ \forall y\in D$ mit $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

□

9.9 Bemerkung: Die Umkehrung obigen Lemmas hängt von D ab! Im Allgemeinen ist sie jedenfalls falsch, d.h. „glm. stetig" ist eine stärkere Eigenschaft als „stetig". Betrachte z.B. $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \frac{1}{x}$. Diese Funktion ist nicht gleichmäßig stetig, aber stetig (nach 8.11):

Zu jedem $\varepsilon>0$ findet man $x,y\in(0,1)$ mit beliebig kleinem Abstand $|x-y|$, so dass trotzdem $|f(x)-f(y)| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| > \varepsilon$ ist.

Man kann also kein δ wie in 9.7 wählen.



(muss ~~nah~~ bei 0 immer kleiner sein, unmöglich zu wählen)

9.10 Satz: Jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist schon gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir nehmen das Gegenteil an, also

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x,y\in[a,b] \text{ mit } |x-y|<\delta \text{ und } |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon .$$

Zu jenem $\varepsilon>0$ und $\delta=\frac{1}{n}$ ex. also $x_n,y_n\in[a,b]$ mit $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ aber $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$. Nach Bolzano-Weierstraß gibt es also eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die konvergiert. Setze $p:=\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\in[a,b]$. Dann gilt jedoch auch $y_{n_k}\to p$, da $x_{n_k}-\frac{1}{n_k}\leq y_{n_k}\leq x_{n_k}+\frac{1}{n_k}$. Da f stetig ist, gilt $f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\to f(p)-f(p)=0$ im Widerspruch zu $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon\ \forall k\in\mathbb{N}$. □