SoSe 2016
Moritz Weber

Analysis II

Inhalt:
- metrische und topologische Räume
- Differentiation und Integration im $\mathbb{R}^n$
- Differentialgleichungen

Abschnitt I: metrische und topologische Räume

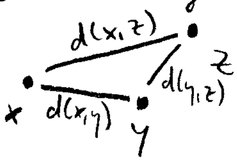
§1 Metrische Räume

1.1 Definition: Eine Metrik auf einer Menge X ist eine Funktion $d: X \times X \to [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad \forall x,y \in X$ $\quad$ (symmetrisch)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\quad \forall x,y,z \in X$ $\quad$ (Dreiecks-Ungleichung)



Ein metrischer Raum (X,d) ist eine Menge X mit einer Metrik d.

1.2 Beispiele: a) $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$, $d(x,y) := |x-y|$ euklidischer Abstand
(eine Metrik ist ein abstrakter Abstandsbegriff)

b) X beliebig, $d(x,y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ diskrete Metrik

1.3 Definition: Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen $x \in X$ ($x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$), falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: d(x_n, x) < \varepsilon$ (d.h. $d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N: d(x_n, x_m) < \varepsilon$

(c) (X,d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X einen Grenzwert in X besitzt.

1.4 <u>Beispiel:</u> $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständig mit d wie in 1.2(a).

1.5 <u>Lemma:</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $x\in X$. Dann ist der Grenzwert x eindeutig. Außerdem ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

<u>Beweis:</u> (a) Sei $x_n \to x$ und $x_n \to y$. Sei $\varepsilon > 0$. Für großes n gilt dann $d(x,y) \leq \underbrace{d(x,x_n)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x_n,y)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$

$\overset{\forall\varepsilon}{\Longrightarrow} d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N\in\mathbb{N}$, so dass für $n\geq N$ gilt: $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n,m\geq N$ also $d(x_n,x_m) \leq \underbrace{d(x_n,x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x,x_m)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$. $\square$

1.6 <u>Satz von der kontrahierenden Abbildung</u> / Banachscher Fixpunktsatz:
Sei (X,d) ein vollständiger, metrischer Raum und $T: X \to X$ eine Abbildung mit:

$$\exists\, 0 \leq C < 1 \;\; \forall x,y\in X: \; d(T(x),T(y)) \leq C\, d(x,y)$$

Dann gibt es genau ein $z\in X$ mit $T(z) = z$ (Fixpunkt).
Des Weiteren konvergiert für jedes $x\in X$ die Folge $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z (wobei $T^n := T\circ\ldots\circ T$ n-fache Komposition).

<u>Beweis:</u> 1.) Es gilt $d(T^n(x),T^n(y)) \leq C^n d(x,y) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

⌈Beweis von 1.): Klar für $n=1$ und induktiv:
⌊ $d(T^{n+1}(x),T^{n+1}(y)) \overset{\text{I.V.}}{\leq} C^n \cdot d(T(x),T(y)) \leq C^{n+1} d(x,y)$

2.) $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge für jedes feste $x\in X$.

⌈Beweis von 2.): Sei $k\in\mathbb{N}$. Es gilt:

$$d(x,T^k(x)) \leq d(x,T(x)) + d(T(x),T^2(x)) + \ldots + d(T^{k-1}(x),T^k(x))$$
$$\overset{1.)}{\leq} d(x,T(x))\,(1 + C + \ldots + C^{k-1}) \leq M < \infty \text{ für ein } M>0.$$

Für $n,k\in\mathbb{N}$ also: $d(T^n(x),T^{n+k}(x)) \overset{1.)}{\leq} C^n d(x,T^k(x)) \leq C^n M \to 0$ für $n\to\infty$
⌊

Somit ist $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, denn X ist vollständig.
Es gibt also ein $F(x)\in X$ mit $T^n(x)\to F(x)$, $n\to\infty$.

3.) $\forall x,y\in X$: $F(x)=F(y)$.

[Beweis von 3.): $d(F(x),F(y)) \leq \underbrace{d(F(x),T^n(x))}_{\to 0} + \underbrace{d(T^n(x),T^n(y))}_{\leq C^n d(x,y)\to 0} + \underbrace{d(T^n(y),F(y))}_{\to 0}$

$\Rightarrow d(F(x),F(y))=0$, also $F(x)=F(y)$

Somit hängt $z:=F(x)$ nicht von x ab und $T^n(x)\to z$ $\forall x\in X$.

4.) $T(z)=z$

[Beweis von 4.): $d(z,T(z)) \leq \underbrace{d(z,T^n(z))}_{\to 0} + \underbrace{d(T(T^{n-1}(z)),T(z))}_{\leq C d(T^{n-1}(z),z)\to 0}$

5.) z ist eindeutig

[Beweis von 5.): Sei $z'\in X$ mit $T(z')=z'$. Dann $z'=T^n(z')\to z$, $\to z' \overset{1.5}{=}$ □

1.7 <u>Beispiel</u>: $T:[0,3]\to[0,3]$, $x\mapsto\sqrt{1+x}$. Da T monoton ist und

$T(0)=1$, $T(3)=2$, ist tatsächlich $T([0,3])\subseteq[T(0),T(3)]\subseteq[0,3]$.

$([0,3], d(x,y)=|x-y|)$ ist vollständig und für $C=\frac{1}{2}$ gilt

$$d(T(x),T(y)) = |\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}} \leq C\,d(x,y)$$

Nach 1.6 hat die Gleichung $\sqrt{1+z}=z$ also eine eindeutige Lösung in $[0,3]$, nämlich $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

(Klar mit $\sqrt{1+z}=z \Leftrightarrow 1+z=z^2$)

1.8 Definition: Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine <u>Norm</u> auf V ist eine Abbildung $V \to [0,\infty)$, $x \mapsto \|x\|$ mit:

(i) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \forall x\in V,\ \lambda\in\mathbb{R}$ bzw. $\lambda\in\mathbb{C}$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in V$ (Dreiecks-Ungleichung)

Ein normierter Raum $(V,\|\cdot\|)$ ist ein Vektorraum V mit einer Norm $\|\cdot\|$.

1.10 Beispiele: a) $V=\mathbb{R}$ oder $V=\mathbb{C}$, $\|x\|:=|x|$ ist eine Norm (eine Norm ist eine abstrakte Längenfunktion)

b) $V=\mathbb{R}^n$ oder $V=\mathbb{C}^n$.

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \text{ oder } \mathbb{C}^n$$

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$$

c) $V=\mathcal{C}[0,1]:=\{f:[0,1]\to\mathbb{C} \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x\in[0,1]\}$. Dies ist ein normierter Raum, siehe Proposition 1.15.

1.9 Proposition: Ist $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist (V,d) ein metrischer Raum mit $d(x,y):=\|x-y\|$. Insofern sind normierte Räume „metrische Räume mit mehr Information".
Die Metrik d auf V ist translationsinvariant, d.h.

$$d(x+z,y+z)=d(x,y) \quad \forall x,y,z\in V.$$

<u>Beweis:</u> direktes Nachrechnen. $\square$

Wir bereiten nun den Beweis von Prop. 1.15 vor.

1.11 <u>Definition</u>: Seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>konvergiert gleichmäßig</u> gegen f, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in [0,1] : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

1.12 <u>Lemma</u>: Für $f, f_n \in \mathcal{C}[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

<u>Beweis</u>: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N :$

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,1]\} = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\square$

1.13 <u>Lemma</u>: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{C}[0,1]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist auch $f \in \mathcal{C}[0,1]$.

<u>Beweis</u>: Sei $x \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$, so dass $\|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$

und $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, falls $|x - y| < \delta$.

(da f_N stetig ist)

Für $|x - y| < \delta$ gilt also:

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leq \|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(y) - f(y)|}_{\leq \|f_N - f\| < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

Somit ist f stetig.

$\square$

1.14 Bemerkung: Es gibt noch eine andere Konvergenz für Funktionenfolgen $f_n:[0,1]\to\mathbb{C}$, nämlich: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f:[0,1]\to\mathbb{C}$, falls für jedes $x\in[0,1]$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Es gilt:

$$f_n\to f \text{ gleichmäßig } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n\to f \text{ punktweise}$$

„$\Rightarrow$" klar nach Def. 1.11. Für „$\not\Leftarrow$" betrachte $f_n(x):=x^n$.
Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$
Alle Funktionen $f_n:[0,1]\to\mathbb{C}$ sind stetig, f hingegen nicht.
Also ist erstens Lemma 1.13 falsch für punktweise Konvergenz und zweitens kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren (wieder nach Lemma 1.13). (*)

1.15 Proposition: $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum.

Beweis: 1.) Für stetige Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ ist $\sup\{|f(x)|\mid x\in[0,1]\}$ ein Maximum (Analysis I), insbesondere ist $\|f\|_\infty<\infty$, also wohldefiniert.

2.) $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ und $(\lambda f)(x):=\lambda f(x)$ machen $C[0,1]$ zu einem Vektorraum.

3.) $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm:

(i) $\|f\|_\infty=0 \Rightarrow 0\le|f(x)|\le 0 \quad \forall x\in[0,1] \Rightarrow f\equiv 0$

(ii) $\|\lambda f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|\lambda f(x)|=|\lambda|\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=|\lambda|\,\|f\|_\infty$

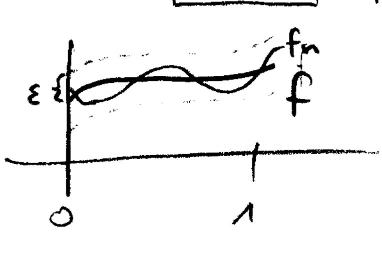
(iii) $\|f+g\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)+g(x)|\le\sup|f(x)|+\sup|g(x)|=\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ $\square$

(*) Man beachte:

$f_n\to f$ punktweise $\Leftrightarrow \boxed{\forall x\in[0,1]}\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$f_n\to f$ gleichmäßig $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N\ \boxed{\forall x\in[0,1]}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass die f_n „uniform" nah bei f sind



1.16 Proposition: $(\mathcal{C}[0,1], d)$ mit $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ wie in Lemma 1.9 ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}[0,1]$ (bzgl. d). Sei $x \in [0,1]$. Dann ist auch $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy, denn für $\varepsilon > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$, so dass für $m,n \geq N$: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Setze $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$. (Grenzwert ex., da $\mathbb{C}$ vollständig ist)

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f: [0,1] \to \mathbb{C}$.

z.z. Konvergenz ist sogar gleichmäßig. (Nach 1.13 dann $f \in \mathcal{C}[0,1]$)

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n,m \geq N$: $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Für jedes $x \in [0,1]$ und $n \geq N$ gilt dann:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ für ein } m \geq N, \text{ da } f_m(x) \to f(x)} + \underbrace{|f_m(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f - f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \overset{1.12}{\Rightarrow} f_n \to f \text{ glm.} \quad \square$$

1.17 Beispiele: Wir können also 1.6 auch auf $(\mathcal{C}[0,1], d)$ anwenden, bzw. auf $X = \mathcal{C}[0,c]$ für $0 \leq c < 1$ (1.11 bis 1.16 funktioniert für $\mathcal{C}[a,b]$, $a<b$ beliebig).

a) $T: \mathcal{C}[0,c] \to \mathcal{C}[0,c]$, $Tf(x) := a + \int_0^x f(t)\,dt$.

Dann $Tf \in \mathcal{C}[0,c]$ nach dem Hauptsatz der DI-Rechnung (sogar diffbar) und $|Tf(x) - Tg(x)| \leq \int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt \leq \|f-g\|_\infty \cdot x \leq c\|f-g\|_\infty$

$$\Rightarrow d(Tf, Tg) = \sup_{x\in[0,1]} |Tf(x) - Tg(x)| \leq c\, d(f,g)$$

Somit hat die Gleichung $f(x) = Tf(x) = a + \int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [0,c]$ eine eindeutige Lösung, bzw. $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = a$.

Die Lösung ist $f(x) = ae^x$.

b) $X = \{f \in C[0,c] \mid f \geq 1\} \subseteq C[0,c]$ vollständig,

$T: X \to X$, $Tf(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{f(t)}\, dt$.

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq \int_0^x \underbrace{|\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}|}_{= \frac{|f(t)-g(t)|}{\sqrt{f(t)} + \sqrt{g(t)}} \leq \frac{1}{2}|f(t)-g(t)|} dt \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \cdot c$$

Also ist T kontrahierend und $f(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{f(t)}\, dt$

bzw. $f'(x) = \sqrt{f(x)}$, $f(0) = 1$ hat eine eindeutige Lösung.

1.18 <u>Definition</u>: Ein <u>Skalarprodukt</u> auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum (oder $\mathbb{R}$-)

V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ mit:

(i) $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + \mu\langle x_2, y\rangle$
$\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y_1\rangle + \bar{\mu}\langle x, y_2\rangle$ $\quad \forall x_1, x_2, \ldots \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ein <u>Prä-Hilbertraum</u> $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt.

1.19 <u>Beispiele</u>: a) $V = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$,

b) $V = C[0,1]$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$

1.20 <u>Proposition</u>: a) In jedem Prä-Hilbertraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz: $\quad \forall x, y \in V: |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

b) Durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ wird eine Norm auf V definiert.
Insofern ist jeder Prä-Hilbertraum ein normierter Raum.

Habe also eine Hierarchie:

{Prä-Hilberträume} $\subsetneqq$ {normierte Räume} $\subsetneqq$ {metrische Räume}

Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ vollständig (als metrischer Raum), so heißt er <u>Hilbertraum</u>.

Beweis: a) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$0 \le \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle$$

1. Fall: $\langle y,y\rangle = 0 \Rightarrow y=0$, also gilt die Ungleichung.
2. Fall: $\langle y,y\rangle \neq 0$. Setze $\lambda := -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$. Dann:

$$0 \le \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} = \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

Gleichheit $\Leftrightarrow 0 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \Leftrightarrow x+\lambda y = 0$

b) (i) und (ii) von 1.8 sind klar. Für (iii):

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\underbrace{\operatorname{Re}\langle x,y\rangle}_{\le |\langle x,y\rangle| \overset{a)}{\le} \|x\|\|y\|} + \|y\|^2 \le (\|x\|+\|y\|)^2$$

$(z+\bar{z} = 2\operatorname{Re} z)$ $\square$

1.21 Bemerkung: a) Die Norm $\|\cdot\|_2$ auf $V=\mathbb{C}^n$ kommt von dem Skalarprodukt von 1.19(a): $\|x\|_2 = \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

b) Die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $C[0,1]$ kommt nicht von dem Skalarprodukt von 1.19(b). Wir haben eine weitere Norm auf $C[0,1]$, nämlich $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Es gilt: $\|f\|_2 \le \|f\|_\infty$ $\left(\|f\|_2^2 = \int_0^1 \underbrace{|f(t)|^2}_{\le \|f\|_\infty^2} dt \le \|f\|_\infty^2 \right)$

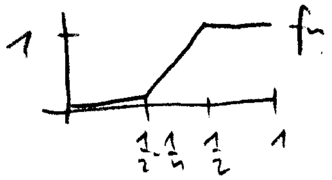
Aber: Es gibt kein $C>0$ mit $\|f\|_\infty \le C\|f\|_2 \quad \forall f \in C[0,1]$

(Betrachte $f_n(t) := \begin{cases} \sqrt{1-nt} & 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$. $\|f_n\|_\infty = 1$, $\|f_n\|_2^2 = \frac{1}{2n}$)

$\left(\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nt)\,dt = t - \frac{n}{2}t^2 \Big|_0^{\frac{1}{n}} \right)$

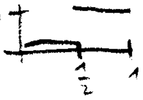
Also $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \; \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \; f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$

Außerdem ist $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig, denn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit



ist eine Cauchyfolge $\left(\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 \underbrace{|f_n(t)-f_m(t)|^2}_{\begin{cases} \le 1 & \text{für } \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \le \frac{1}{n} \right)$, $n<m$

konvergiert jedoch punktweise und in $\|\cdot\|_2$ gegen



$f \notin C[0,1]$.