§2 Topologische Räume

2.1 Definition: Sei X eine Menge. Eine <u>Topologie</u> auf X ist eine Teilmenge $\tau \subseteq \mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ mit:

(a) $\emptyset, X \in \tau$

(b) $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \tau$

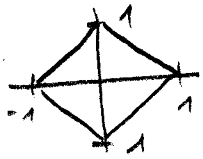
(c) $U_i \in \tau,\ i \in I,\ I$ beliebige Indexmenge $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

Die Mengen in τ werden <u>offene Mengen</u> genannt.
Eine Menge $A \subseteq X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls $X \setminus A$ offen ist.
Ein <u>topologischer Raum</u> (X, τ) ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie τ.

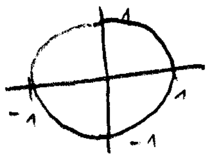
2.2 Definition: Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$, $r > 0$. Dann ist $B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ die (<u>offene</u>) <u>Kugel</u> in (X,d) mit Mittelpunkt x und Radius r.

2.3 Beispiele: Mit den Normen auf $\mathbb{R}^2$ wie in Bsp. 1.10 (b) ist $B(0,1)$:

(a) $\left\|\binom{x}{y}\right\|_1 = |x| + |y| \rightsquigarrow d_1\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right) := \left\|\binom{x_1}{y_1} - \binom{x_2}{y_2}\right\|_1$

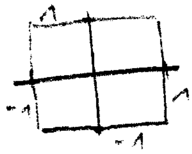


(b) $\left\|\binom{x}{y}\right\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \rightsquigarrow d_2$



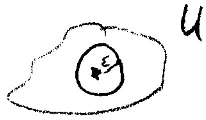
(jeweils ohne Rand)

(c) $\left\|\binom{x}{y}\right\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$



2.4 Proposition: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann definiert

$$\tau := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq U\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



eine Topologie auf X. Somit ist (X,τ) ein topologischer Raum mit der von d <u>induzierten Topologie</u>. Wir haben also:

$$\{\text{Prä-Hilberträume}\} \subsetneq \{\text{normierte Räume}\} \subsetneq \{\text{metrische Räume}\} \subsetneq \{\text{topologische Räume}\}$$

Beweis: (a) $\emptyset, X \in \tau$ ✓

(b) Sei $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Dann gibt es $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$, so dass $B(x,\varepsilon_i) \subseteq U_i$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ ist $B(x,\varepsilon) \subseteq B(x,\varepsilon_i) \subseteq U_i \; \forall i \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n$.

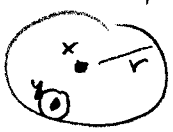
(c) Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h. $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$. Also ex. $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. □

2.5 **Bemerkung:** (a) In einem topologischen Raum (X,τ) ist X sowohl offen als auch abgeschlossen (denn $\emptyset = X \setminus X \in \tau$). Diese beiden Begriffe schließen sich also nicht aus. Außerdem gibt es Mengen in X, die weder offen noch abgeschlossen sind (siehe (e)).

(b) Zu X definiert $\tau := \{\emptyset, X\}$ die triviale Topologie.

(c) Zu (X,d) mit der diskreten Metrik aus 1.2(b) ist $\tau = \mathcal{P}(X)$ die induzierte Topologie (denn $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$). Hier ist jede Menge offen und gleichzeitig abgeschlossen.

(d) In einem metrischen Raum (X,d) ist jede Kugel $B(x,r)$ offen. (Zu $y \in B(x,r)$ ist $B(y,\delta) \subseteq B(x,r)$ für $\delta < r - d(x,y)$:



) Man kann zeigen, dass die offenen Mengen genau die Vereinigungen von solchen Kugeln sind.

(e) Für $(\mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|)$ sind die offenen Mengen genau beliebige Vereinigungen von Intervallen (a,b). Beachte, dass 2.1(b) nur für endliche Schnitte gilt: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})}_{\text{offen}} = \{1\}$ ist nicht offen.

(f) Da $X \setminus \bigcup_i A_i = \bigcap_i (X \setminus A_i)$ und $X \setminus \bigcap_i A_i = \bigcup_i (X \setminus A_i)$ lassen sich die abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum wie folgt charakterisieren:

(a) $\emptyset, X$ abgeschlossen

(b) $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen $\Rightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n$ abgeschlossen

(c) A_i abgeschlossen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

2.6 Lemma: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann:
A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, gilt $x \in A$.

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei A abgeschlossen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ und $x_n \to x \in X$.
A: $x \notin A$, d.h. $x \in X \setminus A$. Da $X\setminus A$ offen ist, ex. $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Andererseits ex. $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ schon $x_n \in B(x,\varepsilon)$ gilt. $\lightning$ $(x_n \in A)$

„$\Leftarrow$" (Kontraposition). Sei A nicht abgeschlossen, d.h. $X \setminus A$ ist nicht offen. Also ex. $x \in X\setminus A$, so dass jede Kugel $B(x,\varepsilon)$ Elemente von A enthält ($B(x,\varepsilon) \not\subseteq X \setminus A$). Wähle $x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A$.
Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_n \to x$ und $x \notin A$. $\square$

2.7 Beispiele: a) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ offen, $(a,b] \subseteq \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

b) In $(\mathbb{R},d)$ ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. Aber in $(\mathbb{Q},d)$ ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ abgeschlossen.

2.8 Definition: Sei (X,τ) ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Der Abschluss $\overline{Y}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge Teilmenge von X, die Y enthält, also
$$\overline{Y} := \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abgeschlossen} \\ Y \subseteq A}} A .$$

2.9 Proposition: Sei (X,d) ein metrischer Raum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $\overline{Y}$ genau die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in Y$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis:</u> Setze $B := \{x \in X \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in Y \ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \to x\}$.
Es gilt $Y \subseteq B \subseteq \overline{Y}$, denn für $x_n := x \in Y$ ist $x_n \to x$ (also $Y \subseteq B$) und für $x_n \to x$ mit $x_n \in Y \subseteq \overline{Y}$ (d.h. $x \in B$) ist $x \in \overline{Y}$ nach 2.6.
z.z.: B ist abgeschlossen (denn $\overline{Y} \subseteq B$ nach Def. d. Abschl., also $B = \overline{Y}$).
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in B$ und $y_n \to y \in X$. Da $y_n \in B$, ex. $x_n \in Y$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ (denn $y_n \in B$ ist Grenzwert einer Folge in Y).
Aber $d(y, x_n) \le \underbrace{d(y, y_n)}_{\to 0} + \underbrace{d(y_n, x_n)}_{< \frac{1}{n} \to 0} \to 0 \Rightarrow y \in B \overset{2.6}{\Rightarrow} B$ abgeschl. □

2.10 <u>Korollar:</u> In einem metrischen Raum (X,d) ist eine Menge $A \subseteq X$ abgeschlossen genau dann, wenn $A = \overline{A}$.

2.11 <u>Beispiele:</u> In $(\mathbb{R}, d)$ gilt $\overline{[a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = \overline{(a,b)} = [a,b]$ und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2.12 <u>Lemma:</u> (a) Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen (X,τ) und (Y,τ'). Dann sind äquivalent:
(i) Die Urbilder $f^{-1}(U) \subseteq X$ von offenen Mengen $U \subseteq Y$ sind wieder offen.
(ii) Die Urbilder $f^{-1}(A) \subseteq X$ von abgeschlossenen Mengen $A \subseteq Y$ sind wieder abgeschl.

(b) Sei $f: (X,d) \to (Y,d')$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X,d) und (Y,d'). Dann sind äquivalent:
(i) bzw. (ii) von (a)
(iii) $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in X: d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$
(iv) $x_n \to x$ in $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ in Y

<u>Beweis:</u> (a) (i)$\Rightarrow$(ii): Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist $U := Y \setminus A$ offen und also auch $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
(ii)$\Rightarrow$(i): analog.
(b) (iii)$\Rightarrow$(iv): Sei $x_n \to x$ und $\varepsilon > 0$. Nach (iii) ex. $\delta > 0$ mit $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ und sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \ge N: d(x, x_n) < \delta$.
Also $d'(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$, d.h. $f(x_n) \to f(x)$.

(iv) ⟹ (iii): (Kontraposition): Es gebe ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ $\exists y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ aber $d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Insbes. ex. zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in X$ mit $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ aber $d'(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Somit $x_n \to x$ aber $f(x_n) \not\to f(x)$.

(i) ⟹ (iii): Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann $U := f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subseteq X$ offen nach (i). Also ex. $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subseteq U$, d.h. für $y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ ist $y \in B(x, \delta) \subseteq U = f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ und somit $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, d.h. $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

(iv) ⟹ (ii): Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in f^{-1}(A)$ und $x_n \to x \in X$. Nach (iv) also $f(x_n) \to f(x)$ mit $f(x_n) \in A$ $\overset{A \text{ abgeschl., } 2.6}{\Longrightarrow}$ $f(x) \in A$, d.h. $x \in f^{-1}(A)$ $\overset{2.6}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(A)$ abgeschlossen. □

2.13 Def./Anm.: a) Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **stetig**, falls eine (und damit alle) der äquivalenten Bedingungen in 2.12(i) erfüllt ist. Sie heißt **stetig in $x \in X$**, falls $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Sie heißt **gleichmäßig stetig**, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in X: \ d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

b) Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, falls eine der beiden äquivalenten Bedingungen in 2.12(a) erfüllt ist.