§3 Kompakte Räume

3.1 Definition: Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) Eine <u>offene Überdeckung</u> von A ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen von X mit $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.

b) A heißt <u>kompakt</u>, falls jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls es $U_{i_1},\dots,U_{i_m}$ mit $i_1,\dots,i_m\in I$ gibt, so dass $A\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$.

c) (X,τ) heißt <u>kompakt</u>, falls X kompakt ist.

3.2 Beispiele: a) Jede endliche Teilmenge von X ist kompakt.
(zu $A=\{x_1,\dots,x_m\}\subseteq\bigcup_{i\in A}U_i$ wähle $i_k\in I$ so, dass $x_k\in U_{i_k}$ ist, $k=1,\dots,m$)

b) $(\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|)$ ist nicht kompakt.
($U_n=(-n,+n)$, $n\in\mathbb{N}$ bilden offene Überdeckung, aber $\mathbb{R}\not\subseteq U_{n_1}\cup\dots\cup U_{n_m}$ für jede endliche Auswahl)

c) $(0,1]\subseteq\mathbb{R}$ in $(\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|)$ ist nicht kompakt.
($U_n=(\frac{1}{n},2)$, $n\in\mathbb{N}$ bilden offene Überdeckung, aber $(0,1]\not\subseteq U_{n_1}\cup\dots\cup U_{n_m}$ immer)

d) $[-1,1]\subseteq\mathbb{R}$ ist kompakt und $\overline{B(0,1)}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le 1\}\subseteq(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ in jeder Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. $\overline{B(0,1)}=\{f\in C[0,1]\mid \|f\|_\infty\le 1\}\subseteq (C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ hingegen ist nicht kompakt.
Techniken um d) zu sehen werden wir im Folgenden entwickeln.

3.3 Proposition: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A\subseteq X$ kompakt. Dann ist A beschränkt (d.h. es gibt ein $r>0$ und ein $x\in X$, so dass $A\subseteq B(x,r)$) und abgeschlossen.

<u>Beweis</u>: 1.) A ist beschränkt: Sei $x \in A$. Die Kugeln $U_n := B(x,n)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden eine offene Überdeckung von A, denn für $y \in A$ ex. $n \in \mathbb{N}$, so dass $d(x,y) < n$, also $y \in U_n$.
Da A kompakt ist, ex. $n_1 < \dots < n_m$, so dass $A \subseteq U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_m} = B(x, n_m)$.
2.) $X \setminus A$ ist offen (also A abgeschlossen): Sei $x \in X \setminus A$.
Setze $U_n := \{ y \in X \mid d(y,x) > \frac{1}{n} \}$ (eine Art „Antikugel"). Dann ist U_n offen (nachrechnen!) und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von A.
(Zu $y \in A$ ist $d(y,x) \neq 0$, da $x \in X \setminus A$, also ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $d(y,x) > \frac{1}{n}$.)
Da A kompakt ist, ex. $n_1 < \dots < n_m$, so dass $A \subseteq U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_m} = U_{n_m}$.
$\Rightarrow B(x, \frac{1}{n_m}) \subseteq X \setminus A$ □

3.4 <u>Bemerkung</u>: a) In einem metrischen Raum gilt also:

$$\text{kompakt} \Rightarrow \text{beschränkt und abgeschlossen}$$

Wann gilt „$\Leftarrow$"? Antwort: in $\mathbb{R}^n$, aber nicht in unendlich-dim. Räumen.
Das werden wir im Folgenden erarbeiten (vgl. 3.2 (d)).

b) Blatt 2: Sei (X,d) kompakt und metrisch und sei $A \subseteq X$. Dann ist A kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen ist.
Genauso sieht man: Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

c) Blatt 2: Sei (X,d) metrisch und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ eine Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ nichtleer und kompakt.

3.5 <u>Definition</u>: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

a) A heißt <u>folgenkompakt</u>, falls jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt in A konvergiert.

b) A heißt <u>präkompakt</u> (oder <u>total beschränkt</u>), falls es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_m \in A$ gibt, so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$.

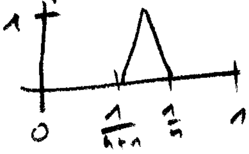
3.6 Beispiel: a) Jede endliche Teilmenge in X ist folgen- und präkompakt.
($(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_1,\dots,x_m\}$ hat eine konstante Teilfolge; $\{x_1,\dots,x_m\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon)\ \forall \varepsilon>0$)

b) $(\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|)$ ist weder folgen- noch präkompakt.
($a_n := n$ hat keine konvergente Teilfolge; $\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon) \subseteq B(0,N) \not\supseteq \mathbb{R}$)

c) $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht folgenkompakt, aber präkompakt.
($a_n := \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin (0,1]$ und jede Teilfolge in (a_n) konvergiert gegen $0 \notin (0,1]$.
$(0,1]$ ist präkompakt, da zu $\varepsilon > \frac{1}{n} > 0$: $(0,1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}-\varepsilon, \frac{k}{n}+\varepsilon\right)$)

d) $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist folgenkompakt (Bolzano-Weierstraß) und präkompakt (wie in (c)).

e) $\overline{B(0,1)} = \{f \in C[0,1] \mid \|f\|_\infty \le 1\} \subseteq (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist weder kompakt, noch folgenkompakt, noch präkompakt.

Nicht folgenkompakt: $g_n :=$ 

$\in \overline{B(0,1)}$, $\|g_n - g_m\|_\infty = 1\ \forall n \neq m$

$\Rightarrow (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge (die ja dann Cauchy wäre).

Nicht kompakt: $U_f := B(f,\frac{1}{4})$, $\underline{f \in C[0,1]}$. Dann ist $(U_f)_{f\in \overline{C[0,1]}}$ eine offene Überdeckung in $\overline{B(0,1)}$, da $\underline{f} \in U_f$. Wäre $\overline{B(0,1)}$ kompakt, so gäbe es $\underline{f_1,\dots,f_m} \in C[0,1]$ mit $\overline{B(0,1)} \subseteq U_{f_1} \cup \dots \cup U_{f_m}$.
Da jedoch $g_n \in \overline{B(0,1)}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\|g_n - g_m\|_\infty = 1$, kann jedes U_{f_k} höchstens ein g_n enthalten ($1 = d(g_n,g_m) \le \underbrace{d(g_n,f_k)}_{<\frac{1}{4}?} + \underbrace{d(f_k,g_m)}_{<\frac{1}{4}?}$).
Widerspruch.

Nicht präkompakt: Gleiches Argument wie für „nicht kompakt", mit $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

3.7 Satz (Borel-Lebesgue): Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.
Es sind äquivalent:
(i) A ist kompakt
(ii) A ist folgenkompakt
(iii) A ist vollständig und präkompakt

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in A$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\not A$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.

Dann gibt es zu jedem $x\in A$ ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $B(x,\varepsilon_x)$ nur endlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält

(denn: $\forall \varepsilon>0$: $B(x,\varepsilon)$ enthält unendl. viele Folgenglieder $\Rightarrow \exists$ TF von (a_n) mit GW x).

Dann ist $(B(x,\varepsilon_x))_{x\in A}$ eine offene Überdeckung von A, und der Kompaktheit ex. also $x_1,\dots,x_m$ mit $A\subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon_{x_i})$ $\lightning$ ($\bigcup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon_i)$ enthält nur endlich viele a_n)

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 1.) A vollständig: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A.

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k}\to a\in A \Rightarrow a_n \to a$ $\left(d(a,a_n)\le d(a,a_{n_k}) + d(a_{n_k},a_n)\right)$

2.) A präkompakt: $\not A$: $\exists \varepsilon>0\ \forall m\in\mathbb{N}\ \forall x_1,\dots,x_m\in A$: $A\not\subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon)$

Wähle: $x_1\in A$

$x_2 \in A\setminus B(x_1,\varepsilon)$ $\quad (A\not\subseteq B(x_1,\varepsilon))$

$x_3 \in A\setminus\left(\bigcup_{i=1}^2 B(x_i,\varepsilon)\right)$ $\quad (A\not\subseteq \bigcup_{i=1}^2 B(x_i,\varepsilon))$

$\vdots$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt dann $d(x_n,x_m)>\varepsilon$ $\forall n\neq m$ und besitzt daher keine konvergente Teilfolge $\lightning$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A.

g.z.z.: $\exists\varepsilon>0\ \forall x\in A\ \exists i\in I$: $B(x,\varepsilon)\subseteq U_i$

(dann: $A\subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon)\subseteq \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$ für $x_1,\dots,x_m\in A$, nach Präkompaktheit)

$\not A$: $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A\ \forall i\in I$: $B(x,\varepsilon)\not\subseteq U_i$.

Zu $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$ ex. $x_n\in A$ mit $B(x_n,\frac{1}{2^n})\not\subseteq U_i$ $\forall i\in I$.

Konstruiere induktiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ und Mengen $M_n\subseteq A$, sowie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ so dass:

(i) $d(a_n,a_{n+1})<\frac{1}{2^n}$

(ii) $B(a_n,\frac{1}{2^n})\not\subseteq U_i$ $\forall i\in I$

(iii) M_n enthält unendlich viele der x_m mit $m\ge n$

(iv) $M_{n+1}\subseteq M_n$

(v) $a_n\in M_n$

(vi) $M_n\subseteq B(z_n,\frac{1}{2^{n+1}})$

[Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy nach (i), also ex. $a \in A$ mit $a_n \to a$. Da $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ ex. $i_0 \in I$ mit $a \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen, ex. $\varepsilon > 0$ mit $B(a,\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Da $a_n \to a$ ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $B(a_N, \frac{1}{2^N}) \subseteq B(a,\varepsilon)$ (z.B. für $d(a,a_N) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$)

Also $B(a_N, \frac{1}{2^N}) \subseteq U_{i_0}$ ↯]

Konstruktion von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ex. $w_1, \dots, w_m \in A$, so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(w_i, \frac{1}{4})$. Also gibt es ein i_0, so dass $B(w_{i_0}, \frac{1}{4})$ unendlich viele x_n enthält. Sei M_1 diese Menge der x_n und $z_1 := w_{i_0}$. Sei a_1 aus M_1.

Sei nun a_n schon konstruiert. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$ ex. $w_1^{(n)}, \dots, w_{m(n)}^{(n)} \in A$, so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m(n)} B(w_i^{(n)}, \frac{1}{2^{n+2}})$. Also gibt es ein i_0, so dass $B(w_{i_0}^{(n)}, \frac{1}{2^{n+2}})$ unendlich viele Elemente aus M_n enthält. Sei M_{n+1} diese Menge (ohne $x_1, \dots, x_n$) und $z_{n+1} := w_{i_0}^{(n)}$; wähle $a_{n+1} \in M_{n+1}$.

Also sind (iii) bis (vi) erfüllt für $n+1$. Da a_{n+1} ein x_m ist mit $m \geq n+1$ ist $B(a_n, \frac{1}{2^n}) \not\subseteq U_i$ $\forall i \in I$, also gilt (ii).

Da $a_n, a_{n+1} \in M_n \subseteq B(z_n, \frac{1}{2^{n+1}})$, ist $d(a_n, a_{n+1}) \leq \underbrace{d(a_n, z_n)}_{<\frac{1}{2^{n+1}}} + \underbrace{d(z_n, a_{n+1})}_{<\frac{1}{2^{n+1}}} < \frac{1}{2^n}$.

$\square$

3.8 Bemerkung: a) Wir sehen präkompakt $\Rightarrow$ kompakt, wie der Name schon suggeriert. Ist (X,d) metrisch und vollständig und ist $A \subseteq X$ präkompakt, so ist der Abschluss $\bar{A}$ kompakt. (denn $\bar{A}$ ist präkompakt und nach Blatt 2 auch vollständig).

b) Der Schritt (i) $\Rightarrow$ (ii) in 3.7 sagt also: In einer kompakten Teilmenge eines metrischen Raums besitzt jede Folge eine konvergente Teilfolge. Das ist eine Verallgemeinerung von Bolzano-Weierstraß.

c) Jeder kompakte, metrische Raum ist vollständig, nach 3.7.

3.9 Satz (Heine-Borel): Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (versehen mit einer beliebigen Norm) ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: Nach 3.3 gilt kompakt $\Rightarrow$ beschränkt & abgeschlossen in jedem metrischen Raum. Wir müssen also „$\Leftarrow$" zeigen in $\mathbb{R}^n$.

1.) Betrachte zunächst $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Sei $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, also $a_m = \begin{pmatrix} a_m^{(1)} \\ \vdots \\ a_m^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Da A beschränkt ist, ex. $r>0$, so dass $A \subseteq B(0,r)$. Also $\sum_{i=1}^{n} |a_m^{(i)}|^2 = \|a_m\|_2^2 = d(a_m,0)^2 < r^2$

$\Rightarrow |a_m^{(i)}| < r \ \forall i, m$, d.h. die Folge $(a_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt $\xRightarrow{\text{Bolzano-Weierstraß}}$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(a_{m_k}^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$

Da aber auch $(a_{m_k}^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ ist, ex. auch hiervon eine konvergente Teilfolge $\xRightarrow{\text{Induktion}}$ Es gibt eine Teilfolge $(a_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, deren Komponenten alle konvergieren

$\xRightarrow{\text{Blatt 1, A4}}$ $(a_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert, d.h. A ist folgenkompakt. Dann 3.7.

2.) Betrachte nun $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ mit $\|\cdot\|$ beliebig.

Nach Blatt 3 sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent.

Somit ist A in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ beschränkt und abgeschlossen genau dann, wenn A in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ beschränkt und abgeschlossen ist. Gleiches gilt für Kompaktheit. $\square$

3.10 <u>Bemerkung</u>: Somit ist $\overline{B(0,1)} \subseteq (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ kompakt, d.h. 3.2(d) ist beantwortet. Da $\overline{B(0,1)} \subseteq (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ebenfalls beschränkt und abgeschlossen, aber nach 3.6(e) <u>nicht</u> kompakt ist, ist Heine-Borel nur für endlichdimensionale Vektorräume wahr.
Man kann sogar zeigen: In einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist $\overline{B(0,1)} = \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$ kompakt genau dann, wenn $\dim V < \infty$.

3.11 <u>Proposition</u>: Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist auch das Bild $f(A) \subseteq Y$ kompakt.

<u>Beweis</u>: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, ex. $i_1, \dots, i_m \in I$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} f^{-1}(U_{i_k})$.
Also $f(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}$. □

3.12 <u>Proposition</u>: Sei $A \subseteq X$ kompakt, (X,d) metrisch, $f: A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Supremum und Infimum an, d.h. $\inf_{x \in A} f(x) = \min_{x \in A} f(x)$ und $\sup_{x \in A} f(x) = \max_{x \in A} f(x)$.

<u>Beweis</u>: Setze $\alpha := \inf_{x \in A} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Also ex. $(a_n) \subseteq A$ mit $f(a_n) \to \alpha$. Da A kompakt ist, ex. eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to a \in A \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(a_{n_k})}_{\to \alpha} \to f(a)$ □

3.13 <u>Proposition</u>: Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei X kompakt. Ist f stetig, so ist f schon gleichmäßig stetig.

<u>Beweis</u>: A: f sei nicht gleichmäßig stetig, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für $\delta = \frac{1}{n}$ Elemente $x_n, y_n \in X$ ex. mit

$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ aber $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Da X kompakt ist, gibt es konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x$, $y_{n_k} \to y$.

Dann $d(x,y) \leq \underbrace{d(x, x_{n_k})}_{\to 0} + \underbrace{d(x_{n_k}, y_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \to 0} + \underbrace{d(y_{n_k}, y)}_{\to 0}$

$\Rightarrow x = y$. Da f stetig ist, ist $f(x_{n_k}) \to f(x) = f(y) \leftarrow f(y_{n_k})$

$\Rightarrow d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to 0$ ↯

$\square$