§4 Sätze über $C[0,1]$

4.1 <u>Erinnerung</u>: • $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist ein vollständiger, normierter Raum (1.15 & 1.16)

- $C[0,1]$ ist interessant z.B. für Anwendungen des Fixpunktsatzes (1.17) oder als Beispiel eines unendlichen normierten Vektorraums (3.2, 3.6, 3.10).
- Es gilt kompakt ⇒ beschränkt & abgeschlossen in metr. Räumen (3.3) und in $\mathbb{R}^n$ sogar „⇔" (3.9), in $C[0,1]$ hingegen „⇍" (3.10). Während also Heine-Borel die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$ charakterisiert, stellt sich die Frage, wie das für $C[0,1]$ aussieht. Wir werden in diesem Kapitel behandeln:
  (a) Satz von Arzela-Ascoli (kompakte Mengen in $C[0,1]$)
  (b) Satz von Stone-Weierstraß (Approximation von Funktionen in $C[0,1]$)

4.2 <u>Definition</u>: Eine Teilmenge $A \subseteq C[0,1]$ heißt <u>gleichgradig stetig</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in A\ \forall x,y \in [0,1] \text{ mit } |x-y| < \delta: \ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

4.3 <u>Bemerkung</u>: a) Entscheidend ist, dass ein δ <u>uniform</u> für alle $f \in A$ gewählt werden kann. Ist $A = \{f\}$, so ist A gleichgradig stetig, da f (gleichmäßig) stetig ist. Interessant wird es, wenn A aus mehreren Funktionen besteht – kann man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, dass für alle $f \in A$ gleichzeitig gilt?

b) Ist A endlich, so ist A gleichgradig stetig (Blatt 4).

c) Ist $f_n \to f$ gleichmäßig und $A := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$, so ist A gleichgradig stetig (Blatt 4). Der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit ist also designed für konvergente Folgen (die wir ja in kompakten Mengen haben wollen).

d) Ist A gleichgradig stetig, so auch $\overline{A}$ (Blatt 4).

4.4 Satz (Arzelà-Ascoli, ≈1890): Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathcal{C}[0,1], d(f,g) := \|f-g\|_\infty)$. Sei $A \subseteq \mathcal{C}[0,1]$. Dann gilt:

A ist kompakt $\Leftrightarrow$ A ist beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig

Beweis: „$\Rightarrow$" Nach 3.3 ist nur zu zeigen, dass A gl.gradig stetig ist.

A: A ist nicht gleichgradig stetig, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, Funktionen $f_n \in A$ und Punkte $x_n, y_n \in [0,1]$, so dass $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ aber $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$.
Da A kompakt ist, besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. (3.8b)
Nach 4.3c ist also $B := \{f_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ gleichgradig stetig, für $f_{n_k} \to f$. Zu obigem $\varepsilon > 0$ ex. also ein $\delta > 0$, so dass für $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_k} < \delta$ gilt: $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} < \delta$ und $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| < \varepsilon$ ↯

„$\Leftarrow$" Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in A$ $\forall n$. ZZ: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente TF.

1.) Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die punktweise für alle $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ konvergiert.

Beweis von 1.): Sei $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine Abzählung.
Da A beschränkt ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := f_n(x_1)$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$.
$(A \subseteq B(0,r) \Rightarrow \|f\|_\infty < r \;\forall f \in A$, insbes. $|f_n(x_1)| \leq \|f_n\|_\infty < r \;\forall n)$
Nach Bolzano-Weierstraß gibt es also eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $y_1 \in \mathbb{C}$. Setze $f_k^{(1)} := f_{n_k}$. ... Also ist $(f_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine TF von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Konstruiere induktiv Teilfolgen $(f_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:

(i) $(f_k^{(m+1)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(f_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$

(ii) $\lim_{k\to\infty} f_k^{(m)}(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, m$

Seien dann $(f_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (f_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$ schon konstruiert. Betrachte dann $a_n := f_n^{(m)}(x_{m+1})$.
... Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $y_{m+1} \in \mathbb{C}$. Setze $f_k^{(m+1)} := f_{n_k}^{(m)}$. Dann ist (i) erfüllt und da $(f_k^{(m+1)}(x_i))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_k^{(i)}(x_i))_{k\in\mathbb{N}}$ ist, ist $\lim_{k\to\infty} f_k^{(m+1)}(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, m+1$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7\ f_8$ × × × × × × × × × × × × × × …

$(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$: × (= g_1) × × × × × × × …

$(f_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$: × × × (= g_2) × …

$(f_n^{(3)})_{n\in\mathbb{N}}$: × × × (= g_3) …

Setze nun $g_n := f_n^{(n)}$. Dann ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $g_n(x_j) = f_n^{(n)}(x_j) \longrightarrow y_j$ für $n\to\infty$ und $j\in\mathbb{N}$.

(Sei $\varepsilon>0$. Dann ex. $N\in\mathbb{N}$, so dass $\forall n\geq N$: $|f_n^{(j)}(x_j)-y_j|<\varepsilon$.
Für $n\geq N$ und $n\geq j$ ist $f_n^{(n)}(x_j) = f_m^{(j)}(x_j)$ mit $m\geq n$, da $(f_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_k^{(j)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Also $|f_n^{(n)}(x_j)-y_j|<\varepsilon$.)

Insofern erfüllt $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} := g_k$ das Geforderte. $\square$(1.)

2.) $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise für alle $x\in[0,1]$.

Beweis von 2.): Sei $x\in[0,1]$ und sei $\varepsilon>0$. Da A gleichgradig stetig ist, ex. ein $\delta>0$, so dass $\forall k\in\mathbb{N}\ \forall x,y\in[0,1]$: $|x-y|<\delta \Rightarrow |f_{n_k}(x)-f_{n_k}(y)|<\varepsilon$.
Sei $x_i\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ mit $|x-x_i|<\delta$. Da $(f_{n_k}(x_i))_{k\in\mathbb{N}}$ nach 1.) konvergiert, ex. $N\in\mathbb{N}$, so dass $|f_{n_k}(x_i)-f_{n_l}(x_i)|<\varepsilon$ falls $k,l\geq N$. Also:

$$|f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x)| \leq \underbrace{|f_{n_k}(x)-f_{n_k}(x_i)|}_{<\varepsilon,\ \text{da } |x-x_i|<\delta} + \underbrace{|f_{n_k}(x_i)-f_{n_l}(x_i)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_{n_l}(x_i)-f_{n_l}(x)|}_{<\varepsilon,\ \text{da } |x-x_i|<\delta} < 3\varepsilon$$

$\Rightarrow (f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge, konvergiert also. $\square$(2.)

3.) $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen den punktweisen Limes f aus 2.).

Beweis von 3.): Sei $\varepsilon>0$ und sei $\delta>0$ aus der gleichgradigen Stetigkeit wie in 2.).
Sei $m\in\mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{m}<\delta$. Zu $\frac{j}{m}\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $j\in\{0,\dots,m\}$ ex. (wie in 2.)) ein $N_j\in\mathbb{N}$, so dass $|f_{n_k}(\frac{j}{m})-f_{n_l}(\frac{j}{m})|<\varepsilon$ falls $k,l\geq N_j$. Sei $N := \max_{0\leq j\leq m} N_j$.
Sei $x\in[0,1]$ beliebig. Dann gibt es ein $j\in\{0,\dots,m\}$, so dass $|x-\frac{j}{m}|<\delta$ und
$|f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x)|<3\varepsilon$ wie in 2.). Also $\|f_{n_k}-f_{n_l}\|_\infty<3\varepsilon$,
d.h. $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}[0,1]$, konvergiert also (gleichmäßig). $\square$(3.)

4.) Der Grenzwert f ist in A, da A abgeschlossen ist.

$\square$

4.5 Beispiel: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}[0,1]$ mit $\|f_n\|_\infty \le 1$, so dass alle f_n differenzierbar sind und $\|f_n'\| \le C$ erfüllen. Dann hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Überprüfe dazu, dass $|f_n(x)-f_n(y)| = |f_n'(\xi)(x-y)| \le C|x-y|$ für ein $\xi\in[0,1]$ gilt (Mittelwertsatz), d.h. $\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ist gleichgradig stetig. (Zu $\varepsilon>0$ wähle $\delta=\frac{\varepsilon}{2C}$.)

Nach 4.3 d ist also $\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig und außerdem abgeschlossen und beschränkt ($\|f_n\|_\infty \le 1$). Dann 4.4.

4.6 Vorbemerkung: Stetige Funktionen können beliebig wild aussehen und schwer zu kontrollieren sein. Polynome hingegen sind sehr viel zahmer und berechenbarer. Weierstraß stellte 1895 fest, dass jede stetige Funktion durch Polynome angenähert werden kann (in $\|\cdot\|_\infty$). Stone bemerkte 1948, dass dies funktioniert, weil die Menge aller Polynome eine bestimmte algebraische Struktur hat.

4.7 Definition: Sei $A\subseteq\mathcal{C}[0,1]$ eine Teilmenge. A ist eine *-Unteralgebra mit Eins, falls die konstante 1-Funktion ($1(x):\equiv 1$) in A ist und für $f,g\in A$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ gilt: $\lambda f+\mu g,\ fg,\ \bar{f}\in A$.

A ist punktetrennend, falls es für alle $x,y\in[0,1]$ mit $x\neq y$ ein $f\in A$ gibt, so dass $f(x)\neq f(y)$. („A erkennt, dass $x\neq y$ ist")

4.8 Satz (Stone-Weierstraß): Sei $A\subseteq\mathcal{C}[0,1]$ eine punktetrennende, abgeschlossene *-Unteralgebra mit Eins. Dann ist $A=\mathcal{C}[0,1]$.

1.) $f\in A$, $0\le f\le 1 \Rightarrow \sqrt{f}\in A$

Beweis von 1.): Die Taylorreihe von $h(x)=\sqrt{1-x}$ um $a=0$ ist

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Berechne
$$h'(x) = -\tfrac12(1-x)^{-\frac12}, \quad h'(0)=-\tfrac12$$
$$h^{(2)}(x) = -\tfrac12\cdot\tfrac12(1-x)^{-\frac32}, \quad h^{(2)}(0)=-\tfrac12\cdot\tfrac12$$
$$h^{(3)}(x) = -\tfrac12\cdot\tfrac12\cdot\tfrac32(1-x)^{-\frac52}, \quad h^{(3)}(0)=-\tfrac{1}{2^3}\cdot 3$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

Man kann zeigen: $\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = -a_n$ mit $a_n < C n^{-\frac32}$ für ein $C>0$.

Also gilt $\sqrt f = h\circ g$ für $g := 1-f$ und daher

$$\Big\|\sqrt f - \Big(1-\sum_{n=1}^{m} a_n g^n\Big)\Big\|_\infty = \Big\|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n g^n\Big\|_\infty \le \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \underbrace{\|g^n\|_\infty}_{\le 1} \le C\sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-\frac32} \to 0$$

Da $1, f\in A$, ist $g\in A$, d.h. $1-\sum_{n=1}^{m} a_n g^n \in A \overset{A \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} \sqrt f\in A$ $\square(1.)$

2.) $f,g\in A$ reellwertig $\Rightarrow \min(f,g), \max(f,g)\in A$.

Beweis von 2.): Sei $h\in A$, $h\neq 0$, $0\le h$. Dann ist $\frac{h}{\|h\|_\infty}\in A$ und $0\le \frac{h}{\|h\|_\infty}\le 1$

$\overset{1.)}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\|h\|_\infty}}\sqrt h\in A \Rightarrow \sqrt h \in A$.

Zu $h\in A$ (i.A. ohne $0\le h$) ist dann $|h| = \sqrt{h\bar h}\in A$.

Nun ist $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}\in A$ und $\max(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2}\in A$. $\square(2.)$

3.) Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon>0$. Dann gibt es ein $g\in A$ mit $\|f-g\|_\infty<\varepsilon$.

Beweis von 3.): Seien $s,t\in[0,1]$, $s\neq t$. Da A punktetrennend ist, finde $h\in A$ mit $h(s)\neq h(t)$, o.E. h reellwertig (sonst Re h oder Im h).
Setze $f_{s,t}(x):=f(t)+(f(s)-f(t))\dfrac{h(x)-h(t)}{h(s)-h(t)}$ für $x\in[0,1]$.
Also $f_{s,t}(s)=f(s)$ und $f_{s,t}(t)=t$ und $f_{s,t}\in A$ reellwertig.
Setze $U_t:=\{x\in[0,1]\mid f_{s,t}(x)<f(x)+\varepsilon\}\subseteq[0,1]$.
Dann ist U_t offen (denn $U_t=(\underbrace{f_{s,t}-f}_{\text{stetig}})^{-1}(\underbrace{(-\infty,\varepsilon)}_{\text{offen}})$), $t\in U_t$.

$\Rightarrow$ Für fest gewähltes $s\in[0,1]$ ist $(U_t)_{t\in[0,1]}$ eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Da $[0,1]$ kompakt ist, ex. endliche Teilüberdeckung $[0,1]\subseteq U_{t_1}\cup\dots\cup U_{t_m}$.
Setze $h_s:=\min_{1\le i\le m} f_{s,t_i}\overset{2.)}{\in}A$. Dann $h_s(s)=f(s)$, $h_s<f+\varepsilon$.
Setze $V_s:=\{x\in[0,1]\mid h_s(x)>f(x)-\varepsilon\}\subseteq[0,1]$.
Dann V_s offen, $s\in V_s$ und $(V_s)_{s\in[0,1]}$ offene Überdeckung von $[0,1]$.
$\Rightarrow$ $[0,1]\subseteq V_{s_1}\cup\dots\cup V_{s_\ell}$ für bestimmte $s_1,\dots,s_\ell\in[0,1]$.
Setze $g:=\max_{1\le j\le \ell} h_{s_j}\overset{2.)}{\in}A$. Dann $f-\varepsilon<g<f+\varepsilon$, d.h. $\|f-g\|_\infty<\varepsilon$.
$\square$ (3.)

4.) Sei $f\in\mathcal{C}[0,1]$ beliebig. Dann ist $f\in A$ (d.h. $A=\mathcal{C}[0,1]$).
Beweis von 4.): Betrachte $\operatorname{Re}f\in\mathcal{C}[0,1]$. Nach 3.) ex. $g_n\in A$ mit $\|\operatorname{Re}f-g_n\|_\infty<\frac{1}{n}$. Also $g_n\to\operatorname{Re}f$
$\overset{A\text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{Re}f\in A$. Ebenso $\operatorname{Im}f\in A$.
$\Rightarrow$ $f=\operatorname{Re}f+i\operatorname{Im}f\in A$. $\square$ (4.)

$\square$

4.9 <u>Bemerkung</u>: a) Die Menge $A := \{p:[0,1]\to\mathbb{R} \mid p \text{ Polynom}\} \subseteq C[0,1]$ ist eine punktetrennende ($p(x)=x$ erfüllt das) *-Unteralgebra von $C[0,1]$. Ein typisches Polynom ist hierbei
$p(x) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl}\, x^k \bar{x}^l$, $a_{kl}\in\mathbb{C}$.

Nach 4.8 ist also $\bar{A} = C[0,1]$, d.h. stetige Funktionen können beliebig gut durch Polynome angenähert werden (klassischer Satz von Weierstraß). Viele Beweise dieses Spezialfalls mit Polynomen benutzen konkrete Eigenschaften von Polynomen oder konstruieren diese Polynome sogar explizit. Der Satz von Stone-Weierstraß hingegen gilt in sehr viel größerer Allgemeinheit und benutzt nur abstrakte Eigenschaften von A (nicht von seinen Elementen). $\|f\|_\infty := \sup_{x\in K}|f(x)| < \infty$

b) Stone-Weierstraß gilt ganz allgemein für $C(K)$, wobei (K,d) ein kompakter metrischer Raum ist (oder sogar für (K,τ), kompakter, topologischer Raum mit Zusatzeigenschaften (Hausdorffsch)). In Schritt 3) haben wir z.B. nur ausgenutzt, dass $[0,1]$ kompakt ist, nicht die konkrete Gestalt von $[0,1]$.

c) Sei $K\subseteq\mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des normierten Raumes $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ mit irgendeiner Norm. Dann ist die Algebra der Polynome in den Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ dicht in $C(K)$.