§5 Parametrisierte Kurven in $\mathbb{R}^n$

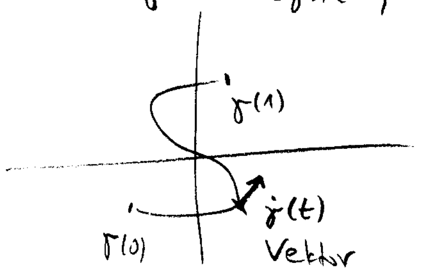
5.1 Definition: Eine (parametrisierte) Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, für $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Sie heißt stetig, falls sie stetig ist als Abbildung zwischen $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ (mit $d(x,y) = |x-y|$, $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$).
Sie heißt differenzierbar im Punkt $t \in [a,b]$, falls für jede Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ mit $t_k \to t_0$, $t_k \neq t_0$ gilt:
$$\dot\gamma(t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_0)}{t_k - t_0}$$
existiert. Der Vektor $\dot\gamma(t_0) \in \mathbb{R}^n$ heißt dann Tangential- oder Geschwindigkeitsvektor.
Die Kurve heißt differenzierbar auf $[a,b]$, falls sie in jedem Punkt $t \in [a,b]$ differenzierbar ist. Sie heißt stetig differenzierbar, falls $t \mapsto \dot\gamma(t)$ stetig ist.

5.2 Bemerkungen: a) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Dann:
$$\gamma(t_k) \to \gamma(t) \iff \gamma_i(t_k) \to \gamma_i(t) \text{ für } i = 1, \dots, n$$
Also: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig $\iff$ $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig für alle $i = 1, \dots, n$

Außerdem: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, so auch bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ auf $\mathbb{R}^n$, nach Blatt 1 A3: $t_k \to t \in [a,b] \Rightarrow \|\gamma(t_k) - \gamma(t)\| \to 0 \overset{\text{Blatt 1, A4}}{\Longrightarrow} \|\gamma(t_k) - \gamma(t)\|' \to 0$

b) Ebenso ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diffbar $\iff$ alle $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar, $i = 1, \dots, n$
Und $\dot\gamma(t) = (\dot\gamma_1(t), \dots, \dot\gamma_n(t))$

c) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

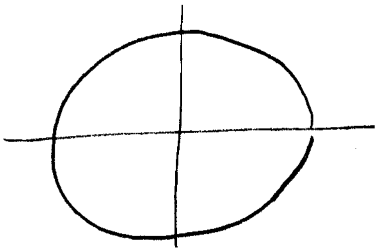


parametrisierte Kurve

↑ wie die Kurve durchlaufen wird

↑ geometrisches Objekt (Teilmenge von $\mathbb{R}^n$)

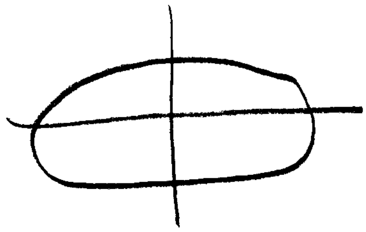
5.3 Beispiele: $n=2$



$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$

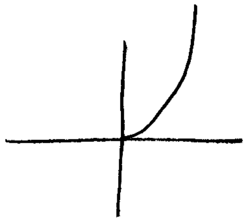
$t \in [0, 2\pi]$

Kreis mit Radius r



$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$

Ellipse



$\gamma(t) = (t, t^2)$

Parabelzweig

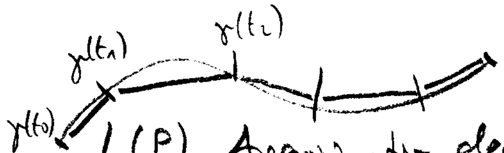
5.4 Definition: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve.

a) Sei $P = \{t_0, \dots, t_k\}$ mit $a = t_0 < \dots < t_k = b$ eine Unterteilung von $[a,b]$.

$$L(P) := \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$ Länge des Sehnenpolygons zu P.

b) γ heißt rektifizierbar, falls $L(\gamma) := \sup\{L(P) \mid P \text{ Unterteilung von } [a,b]\}$ existiert. $L(\gamma)$ heißt dann die Länge von γ.

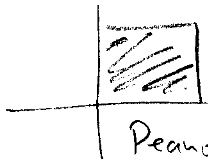
5.5 Bemerkung:



$L(P)$ Approximation der Kurve durch lineare Elemente, jeweils der Länge $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$

Ist P' feiner als P, so gilt $L(P') \geq L(P)$ nach der Dreiecksungleichung. Insofern ist $L(\gamma)$ eine infinitesimale Approximation der Länge.

Beachte: Nicht jede stetige Kurve ist rektifizierbar. Es gibt beispielsweise stetige Kurven $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit Bild $[0,1] \times [0,1]$, also unendlicher Länge.



Peanokurve

5.6 __Satz__: Jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und es gilt $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt$.

__Beweis__: 1.) $\forall \alpha > 0\ \exists \delta > 0$: (i) $\forall \vartheta, \vartheta' \in [a,b]$ mit $|\vartheta - \vartheta'| < \delta$: $\|\dot\gamma(\vartheta) - \dot\gamma(\vartheta')\| < \alpha$

(ii) $\forall s,t,\vartheta \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$ und $a \le s \le \vartheta \le t \le b$:
$$\left| \|\dot\gamma(\vartheta)\| - \left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\right\| \right| < \alpha$$

Beweis von 1.): Sei $\alpha > 0$. Da $\dot\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, ist $\dot\gamma$ gleichmäßig stetig (3.13). Somit ex. $\delta_0 > 0$ mit
$|\vartheta - \vartheta'| < \delta_0 \Rightarrow \|\dot\gamma(\vartheta) - \dot\gamma(\vartheta')\| < \alpha$.
Nach 5.2(a) sind auch alle $\dot\gamma_i: [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, $i = 1, \dots, n$, finde also $\delta_i > 0$ mit $|\vartheta - \vartheta'| < \delta_i \Rightarrow |\dot\gamma_i(\vartheta) - \dot\gamma_i(\vartheta')| < \sqrt{\frac{\alpha^2}{n}}$
Sei nun $\delta := \min(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$. Also gilt (i).
Für (ii): Seien $s,t,\vartheta \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$ und $a \le s \le \vartheta \le t \le b$.
Nach dem Mittelwertsatz für $\gamma_i: [a,b] \to \mathbb{R}$ ex. $\vartheta_i \in [s,t]$
mit $\frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(s)}{t-s} = \dot\gamma_i(\vartheta_i)$. Somit:
$$\left\|\dot\gamma(\vartheta) - \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\right\|_2^2 \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \left|\dot\gamma_i(\vartheta) - \frac{\gamma_i(t)-\gamma_i(s)}{t-s}\right|^2$$
$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{|\dot\gamma_i(\vartheta) - \dot\gamma_i(\vartheta_i)|^2}_{< \sqrt{\frac{\alpha^2}{n}} \text{ da } |\vartheta - \vartheta_i| < |s-t| < \delta} < n \cdot \frac{\alpha^2}{n} = \alpha^2$$

(*) Benutze hier $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Zeige also 1.) nur in einem Spezialfall. Dann Bl.#1.

Da $|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$ (inverse Dreiecksungleichung), beweist dies (ii).
$\square$(1.)

2.) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall P$ Unterteilung mit Feinheit $< \delta$ (d.h. $|t_i - t_{i-1}| < \delta \; \forall i$):
$$\left| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt - L(P) \right| < \varepsilon$$

Beweis von 2.): Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\alpha := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ und wähle $\delta > 0$ gemäß 1.).
Sei P Unterteilung mit Feinheit $< \delta$. Seien $\vartheta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$.

Beachte: $L(P) = \sum_{i=1}^k \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1})$

$\int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t)\| dt$, $\quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(\vartheta_i)\| dt = \|\dot\gamma(\vartheta_i)\|(t_i - t_{i-1})$

Es gilt: $\left| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt - L(P) \right|$

$$\leq \underbrace{\left| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|\dot\gamma(\vartheta_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right|}_{(*)} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^k \left[\|\dot\gamma(\vartheta_i)\| - \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| \right] (t_i - t_{i-1}) \right|}_{(**)}$$

$$(*) = \left| \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\|\dot\gamma(t)\| - \|\dot\gamma(\vartheta_i)\| \right] dt \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\left| \|\dot\gamma(t)\| - \|\dot\gamma(\vartheta_i)\| \right|}_{\leq \|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(\vartheta_i)\| \underset{1.)(i)}{<} \alpha} dt$$

$$(**) \leq \sum_{i=1}^k \underbrace{\left| \|\dot\gamma(\vartheta_i)\| - \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| \right|}_{\underset{1.)(ii)}{<} \alpha} (t_i - t_{i-1})$$

$$< 2\alpha \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) = 2\alpha(b-a) = \varepsilon \qquad \square (2.)$$

3.) $\forall P$ Unterteilung von $[a,b]$: $L(P) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt$

Beweis von 3.): Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Verfeinerung P' von P mit Feinheit $< \delta$ (δ aus 2.).
Dann $L(P) \underset{5.5}{\leq} L(P') \underset{2.)}{\leq} \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt + \varepsilon \overset{\forall \varepsilon > 0}{\Longrightarrow} L(P) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt \qquad \square (3.)$

4.) Nach 3.) ist γ also rektifizierbar mit $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt$.
Nach 2.) ist $\int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt - \varepsilon \leq L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\Longrightarrow \quad L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt.$$

$\square$

5.7 Bemerkung: a) Wie man in Schritt 1.) sieht, wurde 5.6 nur für $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ gezeigt. Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, kann man aber 1.) auch für beliebige Normen zeigen

(genauer: γ stetig diffbar in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \overset{\text{Blatt 5}}{\Longrightarrow} \gamma$ stetig diffbar in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

$\Longrightarrow$ 1.) von 5.6 gilt in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \overset{\text{Äq. der Normen}}{\Longrightarrow}$ 1.) von 5.6 gilt in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$)

Siehe auch Blatt 5.

b) Der Längenbegriff hängt von der Norm ab. Eine Kurve γ kann also bzgl. verschiedener Normen verschiedene Längen haben (genauso wie Vektoren bzgl. verschiedener Normen verschiedene Längen haben).

5.8 Beispiel: $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$,

$$\|\dot\gamma(t)\|_2^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad (\forall t), \quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\| \, dt = 2\pi$$

(Kreisumfang)

5.9 Proposition: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar und $\sigma : [a', b'] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, streng monoton mit $\sigma(a') = a$, $\sigma(b') = b$. Dann hat $\tilde\gamma : [a', b'] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde\gamma(s) = \gamma(\sigma(s))$ die gleiche Länge wie γ, also $L(\gamma \circ \sigma) = L(\gamma)$. Die Länge einer Kurve ist invariant unter Parameterwechsel.

Beweis: $\dot{\tilde\gamma}(s) = \left((\gamma\circ\sigma)_1'(s), \ldots, (\gamma\circ\sigma)_n'(s)\right) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\gamma_1'(\sigma(s))\sigma'(s), \ldots, \gamma_n'(\sigma(s))\sigma'(s)\right)$

$= \dot\gamma(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s)$

$$\Longrightarrow L(\tilde\gamma) = \int_{a'}^{b'} \|\dot{\tilde\gamma}(s)\| \, dt = \int_{a'}^{b'} \|\dot\gamma(\sigma(s))\| \, |\sigma'(s)| \, ds \underset{\text{Subst.}}{=} \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt = L(\gamma) \qquad \square$$

("Kurve dreht nie um")

5.10 Definition: Eine stetig differenzierbare Kurve γ heißt <u>regulär</u> in t, falls $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$ und <u>singulär</u> in t, falls $\|\dot{\gamma}(t)\| = 0$.
Die Kurve heißt <u>regulär</u>, falls sie in allen Punkten regulär ist.

5.11 Proposition: Jede reguläre Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine <u>natürliche Parametrisierung</u>, d.h. es gibt einen Parameterwechsel

$\sigma : [0, L(\gamma)] \to [a,b]$ mit $\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \sigma$ und $\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| \equiv 1$ $\forall s$

<u>Beweis:</u> $\tau : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$, $\tau(x) := \int_a^x \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$ ist stetig diffbar und $\tau(a) = 0$, $\tau(b) = L(\gamma)$. Da $\tau'(x) = \|\dot{\gamma}(x)\| > 0$ $\forall x \in [a,b]$, ist τ auch streng monoton und besitzt daher eine Umkehrfunktion $\sigma := \tau^{-1}$, die wieder stetig diffbar ist. Dann $\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = \|\dot{\gamma}(\sigma(s))\| \, |\sigma'(s)|$ mit $\sigma'(s) = (\tau^{-1})'(s) = \dfrac{1}{\tau'(\tau^{-1}(s))} = \dfrac{1}{\|\dot{\gamma}(\sigma(s))\|}$. $\square$

In der natürlichen Parametrisierung hat $\tilde{\gamma}$ zum Zeitpunkt t die Länge t.