§6 Totale und partielle Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

6.1 Vorbemerkung: Differentiation für Funktionen $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$: Analysis I

Differentiation von $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$: Kurven (komponentenweise diffbar)

Differentiation von $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$: i.A. nicht komponentenweise

Wie behandelt man Funktionen $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ in der Analysis?

Stetigkeit in $x \in \mathbb{R}^n$? Einfach:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Differentiation in $x \in \mathbb{R}^n$? Schwieriger:

versuche "$f'(x) := \lim\limits_{\substack{\xi \to x \\ \xi \neq x}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$"

Problem: was soll $\frac{1}{x - \xi}$ sein, wenn $x, \xi \in \mathbb{R}^n$? Macht keinen Sinn!

Ausweg (An I SoSe, 13.3): Für $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ist äquivalent

(i) f diffbar in x $\left(\text{mit } f'(x) = \lim\limits_{\substack{\xi \to x \\ \xi \neq x}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right)$

(ii) $\exists c \in \mathbb{R} \ \exists \mathbb{R} \supseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ mit

$$f(x + \xi) = f(x) + c\xi + \varphi(\xi), \quad \lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = 0.$$

Dann $f'(x) = c$, d.h. $\xi \mapsto c\xi$ ist eine lineare Approximation an f an der Stelle x, bzw. der Funktion $\xi \mapsto c\xi + f(x)$.

Idee: Ableitung von $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ soll Approximation von $f(x + \xi) - f(x)$ durch eine lineare Funktion $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sein.

6.2 Fakten aus der Linearen Algebra:

a) Eine Abbildung $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt linear, falls $L(x+y) = Lx + Ly$ und $L(\lambda x) = \lambda Lx$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Es gilt dann $L(0) = 0$ (denn $L(0) = L(0 \cdot \xi) = 0 \cdot L\xi = 0$)

c) Für die kanonischen Basen $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ und $g_1, \dots, g_m$ von $\mathbb{R}^m$ ist
$Le_j = \sum_{i=1}^{m} l_{ij} g_i$ und L kann mit der Matrix $(l_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$
identifiziert werden.

d) Wir versehen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{ L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear} \}$ mit den algebraischen Operationen $(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2)(x) := \lambda_1 L_1 x + \lambda_2 L_2 x$ $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$
und $(L_1 \cdot L_2)x := L_1(L_2(x))$ für $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, $L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $x \in \mathbb{R}^n$
Dann entspricht $L_1 + L_2$ der Matrixaddition $\left((l^1_{ij}) + (l^2_{ij}) = (l^1_{ij} + l^2_{ij}) \right)$ und $L_1 \cdot L_2$ der Matrixmultiplikation $\left((l^1_{ij})(l^2_{kl}) = (\sum_k l^1_{ik} l^2_{kj})_{ij} \right)$.

e) Der Ausdruck $\|L\| := \sup\limits_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ \xi \neq 0 \\ \|\xi\| = 1}} \|L\xi\|$ definiert eine Norm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
mit $\|L\xi\| \leq \|L\| \|\xi\|$ $\left(\|L\xi\| = \|L(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot \|\xi\|)\| = \|\xi\| \cdot \underbrace{\|L(\frac{\xi}{\|\xi\|})\|}_{\leq \|L\|}, \ \|\xi\| \neq 0 \right)$

f) Jede Abbildung $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist gleichmäßig stetig, denn zu $\varepsilon > 0$ ist mit $\delta := \frac{\varepsilon}{\|L\|} > 0$: $\|\xi - \eta\| < \delta \Rightarrow \|L\xi - L\eta\| \underset{L \text{ linear}}{=} \|L(\xi - \eta)\| \overset{e)}{\leq} \|L\| \|\xi - \eta\| < \varepsilon$.

(Man kann (a), (b), (d) und (e) auch für unendlich-dimensionale Vektorräume X und Y verallgemeinern; allerdings ist $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ dann nicht mehr automatisch stetig!)

6.3 Definition: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, $x \in U$.

a) f heißt <u>(total) differenzierbar</u> in x, falls es eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $\varphi: B(0,\varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ gibt mit $\lim\limits_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ und

$$f(x+\xi) = f(x) + L\xi + \varphi(\xi) \quad \text{für } \|\xi\| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann $Df(x) := L$ für die <u>(totale) Ableitung</u> von f in x.

b) f heißt <u>differenzierbar in x in Richtung ξ</u> $\in \mathbb{R}^n$, falls die Abbildung
$$\mathbb{R} \supseteq [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad t \longmapsto f(x+t\xi)$$
in $t=0$ differenzierbar ist, wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $x + t\xi \in U \ \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.
Wir schreiben dann $D_\xi f(x)$ für die <u>Ableitung von f in Richtung ξ</u> in x.
Ist $\xi = e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$, so schreiben wir auch $D_i f(x) := D_{e_i} f(x)$.

c) Ist $m=1$, so schreiben wir auch $\frac{\partial f}{\partial x_i} := D_i f$. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ heißen <u>partielle Ableitungen</u>. Die Funktion heißt <u>partiell differenzierbar</u>, falls alle partiellen Ableitungen existieren.

6.4 Proposition:

a) Ist $U \supseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x, so auch stetig in x.

b) Ist $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so ist L differenzierbar mit $DL(x) = L \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

c) Die lineare Abbildung L in 6.3(a) ist eindeutig, d.h. $Df(x)$ ist wohldefiniert.

d) Ist $U \supseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x, so ist f differenzierbar in x in alle Richtungen und $D_\xi f(x) = Df(x)\,\xi$ (Matrix $Df(x)$ auf Vektor ξ anwenden).
Ist $m=1$, so ist f also insbesondere partiell differenzierbar in x.

e) Ist $U \supseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x, so ist die lineare Abbildung $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Die Matrix wird <u>Jacobimatrix</u>, <u>Funktionalmatrix</u> oder <u>Differentialmatrix</u> genannt.

<u>Beweis</u>: a) Sei $\xi_k \to 0$. Dann $L\xi_k \to 0$ nach 6.2(f) und 6.2(b) ... ;
$\varphi(\xi_k) \to 0$, da für $\|\xi_k\| \leq 1$ gilt $\|\varphi(\xi_k)\| \leq \frac{\|\varphi(\xi_k)\|}{\|\xi_k\|} \to 0$.
Also $f(x+\xi_k) = f(x) + L\xi_k + \varphi(\xi_k) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

b) $L'(x+\xi) = Lx + L\xi + 0$, da L linear, also diffbar mit $\varphi(\xi) := 0$.

c) Seien $f(x) + L\xi + \varphi(\xi) = f(x+\xi) = f(x) + L'\xi + \varphi'(\xi)$ für $\|\xi\| < \varepsilon$.
$\Rightarrow L\xi - L'\xi = \varphi'(\xi) - \varphi(\xi)$
Sei $\eta \in \mathbb{R}^n$. Setze $\eta_k := \frac{1}{k}\eta$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$L\eta - L'\eta = \|\eta\| \cdot \left(\frac{L\eta_k - L'\eta_k}{\|\eta_k\|}\right) = \|\eta\| \cdot \left(\underbrace{\frac{\varphi'(\eta_k)}{\|\eta_k\|}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\varphi(\eta_k)}{\|\eta_k\|}}_{\to 0}\right) \to 0$$

$\Rightarrow L\eta = L'\eta \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$.

d) $f \circ \gamma_{\xi,x}(t) = f(x+t\xi) = f(x) + tL\xi + \varphi(t\xi)$, $f \circ \gamma_{\xi,x}(0) = f(x)$

Die Funktion $f \circ \gamma_{\xi,x} : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^m$ ist also im Sinne von 5.1 diffbar:

$$\frac{f\circ\gamma_{\xi,x}(t) - f\circ\gamma_{\xi,x}(0)}{t-0} = L\xi + \underbrace{\frac{\varphi(t\xi)}{\|t\xi\|}}_{\to 0 \text{ für } t \to 0}\|\xi\| \longrightarrow L\xi$$

d.h. der Grenzwert $D_\xi f(x)$ existiert und ist gleich $Df(x)\xi$.

e) Sei $Df(x) = (l_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Dann $f(x+te_j) = f(x) + tLe_j + \varphi(te_j) = f(x) + t\sum_{i=1}^m l_{ij} e_i + \varphi(te_j)$

Für die i-te Komponente $f_i : U \supseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ also

$$f_i(x+te_j) = f_i(x) + tl_{ij} + \varphi_i(te_j)$$

Die Ableitung $D_j f_i(x)$ von f_i in Richtung e_j an der Stelle x ist also gegeben durch l_{ij}. $\square$

6.5 <u>Beispiel</u>: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (xy, x+y)$. $Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6.6 <u>Definition</u>: Sei $U \supseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ differenzierbar ($m=1$).
Dann wird die Jacobimatrix als <u>Gradient</u> von grad f bezeichnet:
$$\operatorname{grad} f(x) = Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \; .. \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

6.7 <u>Proposition</u>: Die Richtungsableitung in Richtung $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist für
$U \supseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ durch $D_\xi f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle$ (Skalarprodukt)
gegeben und es gilt $\|D_\xi f\| \leq \|\operatorname{grad} f(x)\| \|\xi\|$ nach
Cauchy-Schwarz mit Gleichheit (Maximalität), wenn ξ in Richtung
des Gradienten zeigt.

<u>Beweis</u>: Nach 6.4(d) ist $D_\xi f(x)$ durch Anwendung der $1 \times n$-Matrix
$\operatorname{grad} f(x)$ auf den Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben, also
$$D_\xi f(x) = (\operatorname{grad} f)\xi = \sum_{i=1}^n (\operatorname{grad} f)_i \xi_i = \langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle. \qquad \square$$

6.8 <u>Satz</u>: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die
alle partiellen Ableitungen existieren und auf U stetig sind. Dann ist f differenzierbar auf U.

<u>Beweis</u>: Sei $x \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $B(x,\varepsilon) \subseteq U$ (ex. da U offen).
WM $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und φ finden mit $f(x+\xi) = f(x) + L\xi + \varphi(\xi)$, $\|\xi\| < \varepsilon$.
Schreibe $\xi = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n \in \mathbb{R}^n$. Setze $g_n(t) := f(x + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i + t e_n)$.
Also $g_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz ex $\vartheta_n \in [0, \xi_n]$
mit $\dfrac{g_n(\xi_n) - g_n(0)}{\xi_n - 0} = g_n'(\vartheta_n) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i + \vartheta_n e_n)$, $\vartheta_n' := x + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i + \vartheta_n e_n$
$$\Rightarrow \quad f(x+\xi) = g_n(\xi_n) = g_n(0) + \xi_n g_n'(\vartheta_n)$$
$$= f(x + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i) + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vartheta_n')$$
$$\overset{\text{Induktion}}{=} f(x) + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vartheta_1') + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vartheta_n')$$
mit $\vartheta_k' \in [x + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i e_i, \; x + \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i]$.
Setze $L := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also $L\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.
Setze $\varphi(\xi) := \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vartheta_k') - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right) \xi_k$.

Für $\xi \to 0$ ist dann $\vartheta_k' \to x$ (da $\vartheta_k' \in [x + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i e_i, x + \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i]$).

Also $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vartheta_k') \to \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, da $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ stetig.

Somit $\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|} \le \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vartheta_k') - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right|}_{\to 0} \underbrace{\frac{|\xi_k|}{\|\xi\|}}_{\le C} \longrightarrow 0$ für $\xi \to 0$

da $|\xi_k| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_2$ und alle Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent

und $f(x+\xi) = f(x) + L\xi + \varphi(\xi)$. $\square$

6.9 Korollar: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl}
f \text{ stetig partiell diffbar} & & \\
\Downarrow{\scriptstyle 6.8} & & \\
f \text{ (total) diffbar} & \overset{6.4(a)}{\Longrightarrow} & f \text{ stetig in } x \text{ (in allen Richtungen)} \\
 & & \text{(d.h. } x+\xi_n \to x \Rightarrow f(x+\xi_n) \to f(x)) \\
\Downarrow{\scriptstyle 6.4(d)} & & \Downarrow \\
f \text{ in allen Richtungen diffbar} & & \\
\Downarrow{\scriptstyle \text{nach Def.}} & & \\
f \text{ partiell diffbar} & \Longrightarrow & f \text{ stetig in } x \text{ in Richtungen } e_i \\
 & & \text{(d.h. } x + t_n e_i \to x \Rightarrow f(x+t_n e_i) \to f(x)\ \forall i)
\end{array}$$

Keine der Umkehrungen gilt (Blatt 6).

6.10 Definition: $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $D_{i_1} \dots D_{i_k} f$ (Hintereinanderausführung) existieren und stetig sind.

6.11 Satz: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

Dann ist $D_i D_j f = D_j D_i f \quad \forall i,j = 1, \dots, n$.

(In anderer Schreibweise: $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$)

Also ist die Reihenfolge des Ableitens hier egal.

Beweis: Setze $g(t) := f(x+te_i+se_j) - f(x+te_i)$

Nach dem Mittelwertsatz ex. dann für $g:[0,t]\to\mathbb{R}$ ein $\vartheta\in[0,t]$

mit $\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(\vartheta)$. $\Rightarrow g(t)-g(0) = t\,g'(\vartheta)$

mit $g'(\vartheta) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\vartheta e_i+se_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\vartheta e_i)$.

Setze $h(s) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\vartheta e_i+se_j) \Rightarrow \exists\, \vartheta'\in[0,s]: h(s)-h(0) = s\,h'(\vartheta')$

$$\Rightarrow \big(f(x+te_i+se_j)-f(x+te_i)\big)-\big(f(x+se_j)-f(x)\big)$$
$$= g(t)-g(0) = t\,g'(\vartheta) = t\,(h(s)-h(0)) = st\,h'(\vartheta')$$
$$= st\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x+\vartheta e_i+\vartheta' e_j).$$

Ebenso $\big(f(x+se_j+te_i)-f(x+se_j)\big)-\big(f(x+te_i)-f(x)\big)$
$$= st\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x+\eta' e_j+\eta e_i), \quad \eta'\in[0,s],\ \eta\in[0,t]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x+\vartheta e_i+\vartheta' e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x+\eta' e_j+\eta e_i) \quad \text{falls } s,t\neq 0$$

Und $s,t\to 0 \Rightarrow \vartheta,\vartheta',\eta,\eta'\to 0 \overset{\text{Stetigkeit}}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)$ $\square$

6.12 **Bemerkung:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$. Dann ist f stetig/diffbar etc. genau dann, wenn alle $\mathbb{R}^n\supseteq U \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$ dies sind. Daher gelten 6.8, 6.9 und 6.11 analog.

6.13 **Beispiel:** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^{xy}$

$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} f(x,y) = xe^{xy} + xe^{xy} + x^2ye^{xy}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$

6.14 Satz (Kettenregel): Seien $\underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{U}} \xrightarrow{g} \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{V}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k$, g in $x \in U$ differenzierbar, f in $g(x) \in V$ differenzierbar, U, V offen.
Dann ist auch $f \circ g$ in x differenzierbar und es gilt:

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \quad \text{(Matrixmultiplikation)}$$

Beweis: g diffbar in $x \Rightarrow g(x+\xi) = g(x) + Dg(x)\xi + \varphi(\xi)$

f diffbar in $g(x) \Rightarrow f(g(x)+\eta) = f(g(x)) + Df(g(x))\eta + \psi(\eta)$

Mit $\eta = Dg(x)\xi + \varphi(\xi)$ also:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x+\xi) &= f(g(x+\xi)) = f(g(x)+\eta) \\ &= f(g(x)) + Df(g(x))\left(Dg(x)\xi + \varphi(\xi)\right) + \psi\left(Dg(x)\xi + \varphi(\xi)\right) \\ &= (f \circ g)(x) + \left(Df(g(x)) \cdot Dg(x)\right)\xi + \underbrace{Df(g(x))\varphi(\xi) + \psi\left(Dg(x)\xi + \varphi(\xi)\right)}_{\text{Fehlerterm}} \end{aligned}$$

mit $\dfrac{Df(g(x))\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \to 0$, $\dfrac{\psi(Dg(x)\xi + \varphi(\xi))}{\|Dg(x)\xi + \varphi(\xi)\|} \cdot \dfrac{\|Dg(x)\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} \to 0$ für $\xi \to 0$

(denn $\dfrac{\|Dg(x)\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq \|Dg(x)\| + \underbrace{\dfrac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\to 0}$ und $\dfrac{\psi(\ldots)}{\|\ldots\|} \to 0$)

$\square$

6.15 Beispiel: Seien $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ beide diffbar. Dann

$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ $1 \times n$-Matrix (Gradient), $D\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(t) \end{pmatrix}$ $n \times 1$-Matrix

und $\mathbb{R} \xrightarrow{f \circ \varphi} \mathbb{R}$ mit $(f \circ \varphi)'(t) = Df(\varphi(t)) \cdot D\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t)$.

Für $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $t \mapsto (\sin t, \cos t)$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ also

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\sin t, \cos t)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin t, \cos t)\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t) \\ &= 2\sin t \cdot \cos t + 2\cos t(-\sin t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $f \circ \varphi(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ mit $(f \circ \varphi)'(t) = 0$.