# §7 Taylorformel und lokale Extrema

**7.1 Erinnerung** (Taylorformel, eindimensional): Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \geq 0$, so dass $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$ und sei $f: U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + \sum_{m=1}^{k} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \xi^m + R_{k+1}(x) \quad \text{mit} \quad R_{k+1}(x) \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

wobei $R_{k+1}(x) = \frac{1}{k!} \int_0^\xi (\xi - s)^k f^{(k+1)}(x+s)\, ds = \frac{f^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!} \xi^{k+1}$ für ein $\vartheta \in [x, x+\xi]$.

**Beweis**: $f(x+\xi) = f(x) + R_1(x)$ nach HSDI, $R_1(x) = \int_0^\xi f'(x+s)\, ds$

Dann Induktion mit partieller Integration:

$$\int_0^\xi (\xi-s)^k f^{(k+1)}(x+s)\, ds = -\frac{1}{k+1} (\xi - s)^{k+1} f^{(k+1)}(x+s) \Big|_0^\xi + \int_0^\xi \frac{(\xi-s)^{k+1}}{k+1} f^{(k+2)}(x+s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!} \xi^{k+1} f^{(k+1)}(x) + R_{k+2}(x)$$

Alternative Form des Restglieds:

Setze $g(t) := \frac{1}{k!}(\xi - t)^k$, $h(t) := f^{(k+1)}(x+t)$, $t \in [0, \xi]$

Also $g, h$ stetig, $g \geq 0$ und $m := \min\{h(t) \mid t \in [0,\xi]\} \leq h(t) \leq M := \max\{\dots\}$

$\overset{g \geq 0}{\Rightarrow} \quad m\, g(t) \leq g(t) h(t) \leq M g(t) \quad \forall t \in [0, \xi]$

$\Rightarrow \quad m \int_0^\xi g(s)\, ds \leq \int_0^\xi g(s) h(s)\, ds \leq M \int_0^\xi g(s)\, ds$

falls $g \not\equiv 0$ (sonst trivial) $\quad m \leq \dfrac{\int_0^\xi g(s) h(s)\, ds}{\int_0^\xi g(s)\, ds} \leq M$

$$\Rightarrow \exists\, \mathring{\vartheta} \in [0, \xi] \text{ mit } h(\mathring{\vartheta}) = \frac{\int_0^\xi g(s) h(s)\, ds}{\int_0^\xi g(s)\, ds}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^\xi g(s) h(s)\, ds}_{= R_{k+1}(x)} = \underbrace{h(\mathring{\vartheta}) \cdot \int_0^\xi g(s)\, ds}_{= f^{(k+1)}(\underbrace{x + \mathring{\vartheta}}_{=: \vartheta}) \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} \xi^{k+1}}$$

$\square$

**7.2 Bemerkungen:**

(a) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $x, x+\xi\in[a,b]$, so ist $f(x+\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\xi^n$ die Taylorreihe von $f$.

(b) Hatte $f(x+\xi)=f(x)+f'(x)\xi+\underbrace{R_2(x)}_{\text{"}\varphi\text{"}}$

$$=f(x)+f'(x)\xi+\tfrac{1}{2}f''(x)\xi^2+R_3(x)$$

Was ist ein mehrdimensionales Analogon?

**7.3 Definition:** Ein n-Tupel $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ nennen wir Multiindex und setzen $|\alpha|:=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\alpha!:=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$
Für $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ setzen wir $\xi^\alpha:=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.
Ist $\mathbb{R}^n\supseteq U\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ $|\alpha|$-mal stetig differenzierbar, so setzen wir
$D^\alpha f(x):=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}f(x)$.

**7.4 Lemma:** Sei $\mathbb{R}^n\supseteq U\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ $k$-mal stetig partiell differenzierbar.
Sei $x\in U$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $x+t\xi\in U\ \forall t\in[0,1]$.
Dann ist $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(t):=f(x+t\xi)$ $k$-mal stetig differenzierbar und

$$g^{(k)}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha f(x+t\xi)\,\xi^\alpha.$$

Beweis: Mit $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^n,\ t\mapsto x+t\xi$ ist $g(t)=f(\varphi(t))$.

Nach der Kettenregel also: $g'(t)=\sum_{i=1}^n D_if(x+t\xi)\cdot\xi_i$

Iteration liefert: $g''(t)=\sum_{i=1}^n\underbrace{\frac{d}{dt}(D_if(x+t\xi))}_{\sum_{j=1}^n D_jD_if(x+t\xi)\xi_j}\cdot\xi_i=\sum_{i,j=1}^n D_jD_if(x+t\xi)\xi_i\xi_j$

also $g^{(k)}(t)=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n D_{i_1}\cdots D_{i_k}f(x+t\xi)\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}$

(Beachte: $|\alpha|=1\Rightarrow\alpha=(0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)$
$|\alpha|=2\Rightarrow\alpha=(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$, $i\neq j$, oder $\alpha=(0,\dots,0,\underset{i}{2},0,\dots,0)$)

Da $D_{i_1} \dots D_{i_k} f(x) = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ (nach 6.11) und es $\frac{k!}{\alpha!}$ Tupel $(i_1, \dots i_k)$ gibt, die zu gleichem $\alpha$ führen, folgt die Behauptung. □

**7.5 Satz (Taylorformel, mehrdimensional):** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$ und sei $f: U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig partiell differenzierbar. Dann ist

$$f(x+\xi) = f(x) + \sum_{1 \le |\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} D^\alpha \frac{f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

für ein $\vartheta \in [0,1]$.

Beweis: Die Funktion $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x+t\xi)$ ist $(k+1)$-mal stetig diffbar

$$\overset{7.1}{\Longrightarrow} f(x+\xi) = g(1) = g(0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!}, \text{ ein } \vartheta \in [0,1]$$

Dann 7.4: $g^{(m)}(0) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f(x) \xi^\alpha$ □

**7.6 Bemerkung:** Habe also (siehe auch den Beweis von 7.4):

$$f(x+\xi) = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n D_i f(x) \xi_i}_{= \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(x) \xi_i \xi_j}_{= \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle \text{ mit } A = (D_i D_j f(x))_{i,j=1}^n} + \text{weitere Terme}$$

**7.7 Definition:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann heißt die $n\times n$-Matrix $(\operatorname{Hess} f)(x) := (D_i D_j f(x))_{i,j=1,\dots,n}$ die Hesse-Matrix von $f$ im Punkt $x \in U$.

**7.8 Lemma:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, sei $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x + t\xi \in U$ für $t \in [0,1]$. Dann ist

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle (\operatorname{Hess} f)(x)\xi, \xi \rangle + \varphi(\xi)$$

mit $\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0$.

Beweis: Nach 7.5 ist

$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle (\operatorname{Hess} f)(x+\vartheta\xi)\xi, \xi \rangle$.

Setze $\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \langle ((\operatorname{Hess} f)(x) - (\operatorname{Hess} f)(x+\vartheta\xi))\xi, \xi \rangle$.

Also $\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|^2} \overset{C.S.}{\leq} \frac{1}{2} \|(\operatorname{Hess} f)(x) - (\operatorname{Hess} f)(x+\vartheta\xi)\| \to 0$, $\|\xi\| \to 0$

da $f$ zweimal stetig diffbar. $\square$

7.9 Definition: Eine Funktion $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in U$

- ein lokales Maximum, falls $\exists \varepsilon > 0 : f(y) \leq f(x_0) \quad \forall y \in B(x_0, \varepsilon) \subseteq U$
- ein lokales Minimum, … : $\geq$ …
- ein isoliertes Maximum, … : $<$ … $y \neq x_0$
- ein isoliertes Minimum, … : $>$ … $y \neq x_0$

7.10 Satz: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in U$ ein lokales Extremum von $f$. Dann ist $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

(d.h. $D_\xi f(x_0) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$)

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $x_0 + t\xi \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sei $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + t\xi)$. Also ist $g$ extremal in $t = 0$,

d.h. $D_\xi f(x_0) = g'(0) = 0$.

Da $D_\xi f(x) \overset{6.7}{=} \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle$ ist $\operatorname{grad} f(x) = 0 \iff \forall \xi : D_\xi f(x) = 0$. $\square$

7.11 Definition: Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt

- positiv definit, falls alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ sind
- negativ definit, … $< 0$
- indefinit, falls es Eigenwerte $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$ gibt.

**7.12 Bemerkung:** Nach 6.11 ist $D_iD_jf = D_jD_if$, d.h. die Hesse-Matrix ist symmetrisch. Erinnerung: Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch ($A = A^t$ mit $A^t = (a_{ji})$, $A = (a_{ij})$), so kann $A$ diagonalisiert werden, d.h. es gibt eine orthogonale Matrix $U \in M_n(\mathbb{R})$ (also $U^tU = UU^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), so dass

$A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}U^t$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte von $A$.

Es gilt:
- $A$ positiv definit $\Leftrightarrow \langle A\xi,\xi\rangle > 0 \ \forall \xi \neq 0$
- $A$ negativ definit $\Leftrightarrow \langle A\xi,\xi\rangle < 0 \ \forall \xi \neq 0$
- $A$ indefinit $\Leftrightarrow \exists \xi,\eta: \langle A\xi,\xi\rangle > 0, \langle A\eta,\eta\rangle < 0$

⌈Denn: $\langle A\xi,\xi\rangle = \langle U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}U^t\xi,\xi\rangle = \langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\underbrace{U^t\xi}_{=:\xi'}, \underbrace{U^t\xi}_{=\xi'}\rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi_i')^2$ ⌋

**7.13 Satz:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und sei $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$. Dann gilt:

a) $(\operatorname{Hess} f)(x)$ positiv definit $\Rightarrow$ $f$ hat in $x$ ein isoliertes Minimum

b) $(\operatorname{Hess} f)(x)$ negativ definit $\Rightarrow$ — — Maximum

c) $(\operatorname{Hess} f)(x)$ indefinit $\Rightarrow$ $f$ hat in $x$ kein lokales Extremum

d) Sind die Eigenwerte alle $\lambda_i \geq 0$ oder alle $\lambda_i \leq 0$: keine Aussage!

Beweis: a) Setze $A := (\operatorname{Hess} f)(x)$. Also $\langle A\xi,\xi\rangle > 0 \ \forall \xi \neq 0$.

Setze $\mu := \min\{\langle A\xi,\xi\rangle \mid \|\xi\| = 1\} > 0$.

(Ist ein Minimum, da $\xi \mapsto \langle A\xi,\xi\rangle$ stetig und $\{\xi \mid \|\xi\| = 1\}$ kompakt ist.)

Für $\xi \neq 0$ also $\langle A\xi,\xi\rangle = \|\xi\|^2 \cdot \langle A(\frac{\xi}{\|\xi\|}), \frac{\xi}{\|\xi\|}\rangle \geq \mu\|\xi\|^2$.

Außerdem $\varphi(\xi)$ von 7.8: $|\varphi(\xi)| < \frac{1}{2}\mu\|\xi\|^2$ für $\|\xi\| < \varepsilon$

denn $\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|^2} \longrightarrow 0$ für $\|\xi\| \to 0$

Daher mit 7.8: $f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle A\xi,\xi\rangle + \varphi(\xi)$

$> f(x) + \frac{1}{2}\mu\|\xi\|^2 - \frac{1}{2}\mu\|\xi\|^2 = f(x)$

$\Rightarrow x$ isoliertes Minimum. für $\|\xi\| < \varepsilon$

b) Ersetze $f$ durch $-f$.

c) $\exists\xi: \langle A\xi,\xi\rangle > 0 \Rightarrow f$ besitzt auf der Geraden $x+\xi t$ in $x$ ein isoliertes Minimum

$(g(t) = f(x+\xi t),\ g'(0) = 0,\ g''(0) = \langle A\xi,\xi\rangle > 0)$

$\exists\eta: \langle A\eta,\eta\rangle < 0 \Rightarrow f$ besitzt auf $x+\eta t$ in $x$ ein isol. Maximum

$\Rightarrow f(x+t\xi) > f(x)$ und $f(x+t\eta) < f(x)$ für $t\in(0,\varepsilon)$. $\square$

**7.14 Beispiele:** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = c + x^2 + y^2$, $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0)$ für $(x,y) = (0,0)$,
$(\operatorname{Hess} f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ pos. definit $\Rightarrow$ isol. Min. bei $(0,0)$

b) $f(x,y) = c - x^2 - y^2$, $\operatorname{grad} f(x,y) = (-2x, -2y) = (0,0)$ bei $(x,y) = (0,0)$,
$(\operatorname{Hess} f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$ neg. definit $\Rightarrow$ isol. Max. bei $(0,0)$

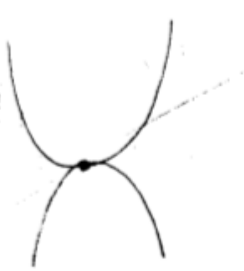
c) $f(x,y) = c + x^2 - y^2$, $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0)$ bei $(x,y) = (0,0)$,
$(\operatorname{Hess} f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremum bei $(0,0)$

d) $f(x,y) = \cos x \cos 2y$, $\operatorname{grad} f(x,y) = (-\sin x\cos 2y, -2\cos x \sin 2y) = (0,0)$
bei $(x,y) = (0,0)$, $(\operatorname{Hess} f)(x,y) = \left.\begin{pmatrix} -\cos x\cos 2y & 2\sin x\sin 2y \\ 2\sin x \sin 2y & -4\cos x\cos 2y\end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4\end{pmatrix}$

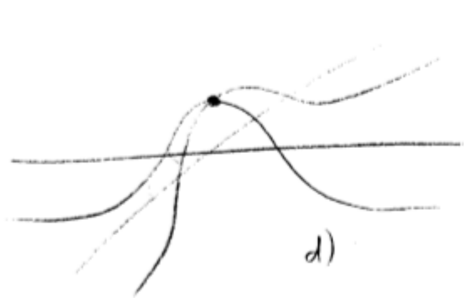
$\Rightarrow$ isol. Max. bei $(0,0)$

a) mit $c=0$

b) mit $c=0$



c) mit $c=0$



d)