§ 9 Differentiation von parameterabhängigen Integralen

9.1 Satz: Seien $I = [a,b]$, $J = [a',b']$ kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$. Sei $f : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Regelfunktion.
Setze $F(t) := \int_a^b f(x,t)\varphi(x)\,dx$, also $F : J \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) F ist stetig

b) Ist f stetig partiell nach t diff'bar, so ist F diff'bar und

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\varphi(x)\,dx$$

Man kann also „die Ableitung in das Integral reinziehen".
Mit anderen Worten: Erst integrieren und dann ableiten ($F'(t)$) ist das Gleiche wie erst ableiten und dann integrieren ($\int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\varphi(x)\,dx$).
(technisch wichtiges Resultat)

Beweis: a) Da $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig (3.13)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|(x,t)-(y,s)\| < \delta \Rightarrow |f(x,t) - f(y,s)| < \varepsilon$

Insbesondere für $x = y$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |t-s| < \delta \Rightarrow |f(x,t) - f(x,s)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

Also gilt für $|t-s| < \delta$:

$$|F(t) - F(s)| = \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x,s))\varphi(x)\,dx \right| \le \int_a^b \underbrace{|f(x,t)-f(x,s)|}_{<\varepsilon}\,\underbrace{|\varphi(x)|}_{\le \|\varphi\| < \infty}\,dx$$

(da φ Regelfkt)

$$\le (b-a)\|\varphi\|\varepsilon \quad \Rightarrow F \text{ stetig}$$

b) $\frac{\partial f}{\partial t}$ stetig auf $I \times J \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$ gleichmäßig stetig.

Sei $t \in J$, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $h_n \to 0$, $h_n \neq 0\ \forall n$.

$$\frac{f(x, t+h_n) - f(x,t)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \vartheta_n h_n) \quad \text{für ein } \vartheta_n \in (0,1) \text{ (Mittelwertsatz)}$$

$$\frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int_a^b \underbrace{\frac{f(x,t+h_n) - f(x,t)}{h_n}}_{=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\vartheta_n h_n) \to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \text{ für } h_n \to 0} \varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\varphi(x)\,dx$$

gleichmäßig in x

$\square$

9.2 Beispiel: $\int_0^a x^2 \cos x \, dx = ?$

$$F(t) := \int_0^a \cos xt \, dx$$
$$F'(t) \overset{9.1}{=} \int_0^a -x \sin xt \, dx$$
$$F''(t) \overset{9.1}{=} -\int_0^a x^2 \cos xt \, dx$$

Andererseits $F(t) = \int_0^a \cos xt \, dx = \frac{\sin xt}{t} \Big|_0^a = \frac{\sin at}{t}$

$$\Rightarrow F''(t) = \frac{2 \sin at}{t^3} - \frac{2a \cos at}{t^2} - \frac{a^2 \sin at}{t}$$

$$\Rightarrow \int_0^a x^2 \cos x \, dx = -F''(1) = (a^2-2) \sin a + 2a \cos a$$

9.3 Satz. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offene Kugel und $v: U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbar. Dann sind äquivalent:

(i) $\exists f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diffbar mit $v(x) = \operatorname{grad} f(x)$

(ii) $\operatorname{rot} v(x) = 0 \quad \forall x \in U$ mit $\operatorname{rot} v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $v(x) = \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\right)$.

Da $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i x_j} \overset{6.11}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, ist $\operatorname{rot} v(x) = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\operatorname{rot} v(x) = 0$, d.h. $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j$

o.E. $U = B(0,r)$.

Setze $f(x) := \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^1 v_i(tx) \, dt\right) x_i$.

Dann $\frac{\partial f}{\partial x_j} \underset{\text{Kettenregel}}{\overset{\text{Produktregel}}{=}} \sum_{i=1}^3 \int_0^1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx) \cdot t\right) dt \cdot x_i + \int_0^1 v_j(tx) \, dt$

Und $\frac{\partial}{\partial t}\left(t v_j(tx)\right) \underset{\text{Kettenregel}}{\overset{\text{Produktregel}}{=}} v_j(tx) + \sum_{i=1}^3 t \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 v_j(tx) \, dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^1 t \underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(tx)}_{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx)} \cdot x_i \, dt}_{= \frac{\partial f}{\partial x_j}} = t v_j(tx) \Big|_0^1 = v_j(x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f = v$$

$\square$