§10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1 Definition:

a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Eine <u>explizite (gewöhnliche) Differentialgleichung n-ter Ordnung</u> ist eine Gleichung $f(t, u(t), u'(t), \dots u^{(n-1)}(t)) = u^{(n)}(t) \quad \forall t \in I$ wobei $u: I \to \mathbb{R}$ eine <u>Lösung</u> der DGL ist (normal stetig differenzierbar).

b) Ist $F: I \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist
$F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0$ eine <u>implizite DGL n-ter Ordnung</u>.

c) Ist $f: I \times (\mathbb{R}^N)^{n-1} \to \mathbb{R}^N$ oder $F: I \times (\mathbb{R}^N)^n \to \mathbb{R}^N$ und $u: I \to \mathbb{R}^N$, so sprechen wir von einem <u>System von DGL n-ter Ordnung</u>.

d) Ist f bzw. F linear, so heißt die DGL <u>linear</u>.

e) Sind $u_0, u_1, \dots u_{n-1} \in \mathbb{R}^N$ gegeben und soll für ein $t_0 \in I$ $u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_1, \dots u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$ für eine Lösung u gelten, so sprechen wir von einem <u>Anfangswertproblem</u>.
Ist $I = [a,b]$ und soll $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$ gelten, für $u_a, u_b \in \mathbb{R}^N$ gegeben, so sprechen wir von einem <u>Randwertproblem</u>.

10.2 Bemerkung: Wir interessieren uns im Zusammenhang mit DGL für:

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit von Lösungen (in einem Anfangswert-/Randproblem)
- explizite Lösungen bzw. Verfahren diese zu erlangen

10.3 Lemma: Eine explizite DGL n-ter Ordnung ist äquivalent zum folgenden System von DGL 1-ter Ordnung mit $N = n$:

(A) $\quad f(t,u,u',\dots,u^{(n-1)}) = u^{(n)}$ $\quad$ DGL n-ter Ordnung

(B) $\quad \tilde{F}(t,\tilde{u}) = \tilde{u}'$ $\quad$ DGL-System 1-ter Ordnung

mit $\tilde{F}(t,\tilde{u}(t)) = (u_2(t), u_3(t), \dots, u_n(t), f(t,u_1(t),\dots,u_n(t)))$

Beweis: (A)→(B): Ist u eine Lösung von (A), so setze $\tilde{u} := (u, u', \dots, u^{(n-1)})$. Also mit $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_1 = u$, $u_2 = u'$, ..., $u_n = u^{(n-1)}$:

$$\tilde{u}'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \\ \vdots \\ u^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ u^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \tilde{F}(t,\tilde{u}(t))$$

(B)→(A): Ist umgekehrt $\tilde{u}$ eine Lösung von (B), so löst $u(t) := u_1(t)$ die DGL (A), denn

$$f(t, \underbrace{u_1(t)}_{=u(t)}, \underbrace{u_2(t)}_{=u'(t)}, \dots, \underbrace{u_n(t)}_{=u^{(n-1)}(t)}) = \underbrace{u_n'(t)}_{=u^{(n)}(t)}$$

□

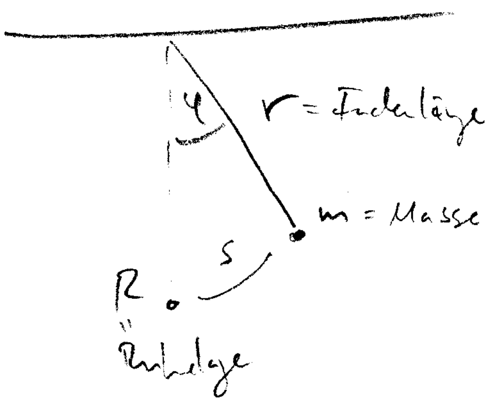
10.4 Beispiele:

a) Radioaktiver Zerfall. $u(t) :=$ Anzahl der Atome einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t

$u'(t) =$ Atome, die in t zerfallen.

$u' = -\lambda u$ lineare DGL 1. Ordnung

b) Pendel.



$s(t) = r\varphi(t)$ Auslenkung

$\Rightarrow s''(t) = r\varphi''(t)$

3. Newtonsches Axiom:

$$m \underbrace{s''(t)}_{= r\varphi''(t)} = -mg\sin(\varphi(t))$$

$$\Rightarrow \varphi''(t) + \frac{g}{r}\sin(\varphi(t)) = 0$$

nichtlineare DGL 2. Ordnung

c) Populationsmodelle. $u(t) :=$ Population zum Zeitpunkt t

$g :=$ Geburtsrate (konstant)

$s :=$ Sterberate (konstant

$u' = (g-s)u$ lineare DGL 1. Ordnung

unrealistisch, da für $t \to \infty$: $u(t) \to \infty$ (bei $g-s>0$)

Verhulstmodell: $s(t) = s_0 + a u(t)$ Sterberate (inkl. ökol. Probleme)

Also $u' = ((g-s_0) - au)u$

nichtlin. DGL 1. Ordnung

d) Räuber-Beute-Modell. $u_1(t) :=$ Beutetiere

$u_2(t) :=$ Raubtiere

$S_1(t) := s_0 + a_1 u_1(t) + r u_2(t)$ Sterberate Beutetiere

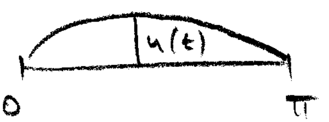
$S_2(t) := s_0 - b u_1(t) + a_2 u_2(t)$ Sterberate Raubtiere

$u_1' = (g_1 - S_1)u_1$

$u_2' = (g_2 - S_2)u_2$

nichtlineares DGL-System ($N=2$) 1. Ordnung

e) schwingende Saite. $u'' + \lambda u = 0$, $u(0) = u(\pi) = 0$



lineare DGL 2. Ordnung (nicht für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Lösbar sondern nur für $\lambda = n^2, n \in \mathbb{N}$)