§11 DGL-System 1. Ordnung

Wir interessieren uns für Lösungen von $f(t,u)=u'$.

11.1 Lemma: Sei $h:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $h=(h_1,\dots,h_n)$, so dass alle h_i, $i=1,\dots,n$ Regelfunktionen sind. Betrachte $\int_a^b h(t)\,dt := \left(\int_a^b h_1(t)\,dt,\dots,\int_a^b h_n(t)\,dt\right)\in\mathbb{R}^n$.
Dann gilt $\left\|\int_a^b h(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|h(t)\|\,dt$ und $\|h\|:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.
Ist h zusätzlich stetig differenzierbar, so gilt $\int_a^b h'(t)\,dt = h(b)-h(a)$.

Beweis: Sei $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, so dass alle φ_i, $i=1,\dots,n$ Treppenfunktionen sind. Dann sind auch φ und $\|\varphi\|:[a,b]\to\mathbb{R}$ Treppenfunktionen (nehme die Vereinigung der Unterteilungen von $[a,b]$ aller φ_i).
D.h. es gibt eine Unterteilung $a=t_0<t_1<\dots<t_p=b$, so dass φ auf $[t_i,t_{i+1})$ konstant ist.
Da $h_1,\dots,h_n$ Regelfunktionen sind, ex. eine Folge $(\varphi^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass alle $\varphi_1^{(k)},\dots,\varphi_n^{(k)}$ Treppenfunktionen sind (somit auch $\varphi^{(k)}$) mit $\|h_i-\varphi_i^{(k)}\|_\infty\to 0$ für $k\to\infty$.
Da $\int_a^b \varphi^{(k)}(t)\,dt=\sum_{j=1}^p c_j(t_j-t_{j-1})$ (weil $\varphi^{(k)}$ Treppenfunktion), ist

$$\begin{array}{ccccc} \left\|\int_a^b \varphi^{(k)}(t)\,dt\right\| & \leq & \sum_j \|c_j\|\,|t_j-t_{j-1}| & = & \int_a^b \|\varphi^{(k)}(t)\|\,dt \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \left\|\int_a^b h(t)\,dt\right\| & & & & \int_a^b \|h(t)\|\,dt \end{array}$$

Ist außerdem h stetig diffbar, so gilt der HSDI komponentenweise. □

11.2 Definition: Eine Funktion $\mathbb{R}^n\supseteq U\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m$ ist Lipschitz-stetig (oder: genügt einer Lipschitz-Bedingung), falls es ein $L\geq 0$ gibt mit

$$\|f(x)-f(y)\|\leq L\|x-y\| \quad \forall x,y\in U$$

11.3 <u>Bemerkung</u>: a) f Lipschitz-stetig $\Longrightarrow$ f stetig

(denn für $\delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0$ ist $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$)

b) f linear $\Longrightarrow$ f Lipschitz-stetig $L = \|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\}$

c) f stetig differenzierbar auf $U = B(z,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\|Df(x)\| \leq C$ $\forall x \in B(z,r)$

$\Longrightarrow$ f Lipschitz-stetig mit $L = C$.

(betrachte $h(t) := f(x + t(y-x))$ für $x, y \in B(z,r)$. Dann:

$$\|f(x)-f(y)\| = \|h(0)-h(1)\| \overset{11.1}{=} \left\|\int_0^1 h'(t)\,dt\right\| = \left\|\int_0^1 Df(x+t(y-x))(y-x)\,dt\right\|$$

$$\overset{11.1}{\leq} \int_0^1 \underbrace{\|Df(x+t(y-x))\|}_{\leq C}\,\|y-x\|\,dt \leq C\|y-x\| \quad)$$

11.4 <u>Satz (Picard-Lindelöf)</u>: Seien $a, b \geq 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Sei $I := [t_0 - a, t_0 + a]$ und $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Sei $D := I \times B(x_0, b) \subseteq I \times \mathbb{R}^N$. Sei f stetig auf D und sei $f(t,\cdot)$ Lipschitzstetig auf $B(x_0,b)$ $\forall t \in I$, d.h. $\exists L \geq 0 : \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$ $\forall (t,x),(t,y) \in D$.

Sei $\alpha := \min(a, \frac{b}{M})$ und $M := \sup\{\|f(t,x)\| \mid (t,x) \in D\}$.

Dann besitzt das DGL-System 1.ter Ordnung $f(t,u) = u'$ mit Anfangswert $u(t_0) = x_0$ genau eine Lösung $u : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^N$.

<u>Beweis</u>: u mit $u(t_0) = x_0$ löst $f(t,u) = u'$

$$\Longleftrightarrow \quad u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds, \quad u(t_0) = x_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad u(t) = \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds + x_0 =: Tu(t)$$

Muss also Fixpunktproblem $u = Tu$ lösen.

Idee: Banachscher Fixpunktsatz.

Aber: brauche Verfeinerung davon.

1.) $X := \{ f : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \overline{B(x_0,b)} \mid f \text{ stetig} \}$ ist ein vollständiger, normierter Raum mit $\|\cdot\|_\infty$ und $T : X \to X$, $(Tg)(t) := \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))\,ds + x_0$ ist wohldefiniert.

Beweis von 1.): X ist vollständig, normiert (wie in 3.) von 8.2).
Sei $g \in X$ und $t \in I$. Dann ist $(Tg)(t) \in \overline{B(x_0,b)}$, denn:
$\| Tg(t) - x_0 \| = \| \int_{t_0}^{t} f(s,g(s))\,ds \| \overset{11.1}{\leq} \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s,g(s))\|}_{\leq M} ds \leq M\alpha \leq b$ □(1.)

2.) $\forall g,h \in X, t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha] : \|(Tg)(t) - (Th)(t)\| \leq L\,|t-t_0|\,\|g-h\|_\infty$.

Beweis von 2.): Sei $t \in I$. Dann
$$\|(Tg)(t) - (Th)(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} f(s,g(s)) - f(s,h(s))\,ds \|$$
$$\overset{11.1}{\leq} \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s,g(s)) - f(s,h(s))\|}_{\leq L\|g(s)-h(s)\| \leq L\|g-h\|_\infty} ds \leq L\,|t-t_0|\,\|g-h\|_\infty$$ □(2.)

Für $t \in (t_0 - \frac{1}{L}, t_0 + \frac{1}{L})$ (d.h. $L|t-t_0| < 1$) gibt es also eine Lösung $Tu = u$ nach dem Fixpunktsatz - aber für $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$?
Verfeinerte Betrachtung der Kontraktionsgleichung...

3.) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall g,h \in X\ \forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha] : \|T^n g(t) - T^n h(t)\| \leq \frac{L^n |t-t_0|^n}{n!} \|g-h\|_\infty$

Beweis von 3.): $n=1$: 2.)
$n \to n+1$: $\|T^{n+1}g(t) - T^{n+1}h(t)\| \overset{\text{wie in 2.)}}{\leq} \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s,T^n g(s)) - f(s,T^n h(s))\|}_{\leq L\|T^n g(s) - T^n h(s)\| \overset{\text{I.V.}}{\leq} L^{n+1}\frac{|s-t_0|^n}{n!}\|g-h\|_\infty} ds$
$$\leq \frac{L^{n+1}}{n!}\|g-h\|_\infty \int_{t_0}^{t} |s-t_0|^n\,ds = \frac{L^{n+1}}{n!}\|g-h\|_\infty \cdot \frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1}$$ □(3.)

4.) $\forall g \in X$: $(T^n g)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X.

Beweis von 4.): $\|T^n g - T^n h\|_\infty \le \frac{L^n \alpha^n}{n!} \|g-h\|_\infty$ für $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]} \{\|f(t)\|\}$ nach 3.).

Also $\|T^n g - T^{n+k} g\|_\infty = \|T^n g - T^n(T^k g)\|_\infty \le \frac{L^n\alpha^n}{n!} \|\underset{\underset{X}{\cap}}{g} - \underset{\underset{X}{\cap}}{T^k g}\|_\infty \le 2b \frac{L^n \alpha^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (unabhängig von k)

$\square$ (4.)

5.) Für $u := \lim_{n\to\infty} T^n g$, ein $g \in X$, ist $Tu = u$ und die Lösung ist eindeutig (hängt insbesondere nicht von $g \in X$ ab).

Beweis von 5.): $Tu = T(\lim_{n\to\infty} T^n g) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} g = u$.

Und ist $Tv = v$, so gilt $\|u-v\|_\infty \le \underbrace{\|u - T^n u\|}_{=0} + \underbrace{\|T^n u - T^n v\|}_{\le \frac{L^n\alpha^n}{n!}\|u-v\| < \varepsilon} + \underbrace{\|T^n v - v\|}_{=0}$

$\Rightarrow u = v$

$\square$ (5.)

$\square$ (11.4)

11.5 Bemerkung: Satz 11.4 beantwortet also die Frage nach der Existenz und der Eindeutigkeit des AWP $f(t,u) = u'$, $u(t_0) = x_0$.
Gleichzeitig liefert es aber auch ein Verfahren zur Bestimmung von u.
Man setze $g(t) :\equiv x_0$ und berechne sukzessive $T^n g$ durch
$(Th)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, h(s))\,ds + x_0$.

11.6 Beispiel: a) Was ist die Lösung von $u' = u$ mit $u(0) = C$ (also $N=1$, $f(t,u) = u$)?

$g(t) \equiv C$

$Tg(t) = \int_0^t g(s)\,ds + C = C + Ct$

$T^2 g(t) = \int_0^t (C + Cs)\,ds + C = C + Ct + \frac{1}{2} C t^2$

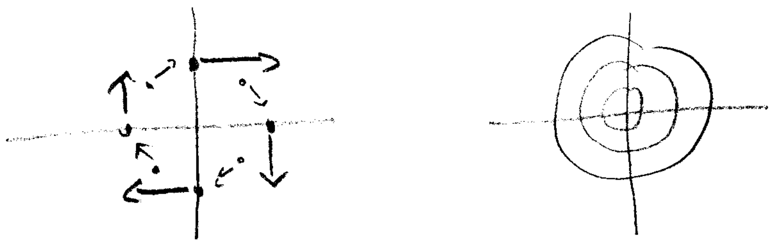
$T^n g(t) = C \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \longrightarrow Ce^t$

Wussten wir aber bereits: $(Ce^t)' = Ce^t$ mit $Ce^0 = C$.

b) System $u_1' = u_2$, $u_2' = -u_1$ also DGL-System ($N=2$) 1. Ordnung

$\rightsquigarrow$ $u' = f(u)$, wo $f(x_1,x_2) = (x_2, -x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Lösung dieses DGL-Systems für $u(0) = (a,b)$?



f $\qquad$ u

$g(t) = (a,b)$

$T_g(t) = \int_0^t (b,-a)\,ds + (a,b) = (a+bt, b-at)$

$T_g^2(t) = \int_0^t (b-as, -a-bs)\,ds + (a,b) = (a+bt-a\frac{t^2}{2}, b-at-b\frac{t^2}{2})$

$T_g^n(t) \longrightarrow (a\cos t + b\sin t, b\cos t - a\sin t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

11.7 Bemerkung:

Die DGL aus 11.6 sind beide linear. Kann man allgemein eine Lösung für $u' = Au$, $A \in M_N(\mathbb{R})$ angeben? ($\rightsquigarrow$ $u(t_0) = x_0$)

Versuche $g(t) = x_0$

$T_g(t) = \int_{t_0}^t Ax_0\,ds + x_0 = x_0 + Ax_0(t-t_0)$

$T^2_g(t) = \int_{t_0}^t (Ax_0 + A^2x_0(s-t_0))\,ds + x_0 = x_0 + Ax_0(t-t_0) + A^2x_0\frac{(t-t_0)^2}{2}$

$T^n_g(t) = \left(1 + A(t-t_0) + \ldots + A^n\frac{(t-t_0)^n}{n!}\right)x_0$

konvergiert das gegen „$e^{A(t-t_0)}x_0$" ?

Macht dieser Ausdruck Sinn?

11.8 Satz: Das lineare DGL-System 1.ter Ordnung

$$Au = u' \quad \text{mit} \quad u(t_0) = x_0 \quad , A \in M_N(\mathbb{R})$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $u(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$.

Beweis: 1.) Der Raum $M_N(\mathbb{R})$ mit der Matrixnorm

$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$ ist vollständig, für $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$.

Beweis von 1.): Sei $A = (a_{ij}) \in M_N(\mathbb{R})$.

Sei $\|x\| = 1$, d.h. $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \in \mathbb{R}^N$ und $|x_i| \le 1 \ \forall i$

$$\left(|x_i|^2 \le \sum_j |x_j|^2 = \|x\|^2 = 1\right)$$

Also $\|Ax\| = \|\sum_{i=1}^{N} x_i Ae_i\| = \|\sum_{ij} x_i a_{ij} e_j\| \le \sum_{ij} \underbrace{|x_i|}_{\le 1} |a_{ij}| \underbrace{\|e_j\|}_{=1} \le \sum_{ij} |a_{ij}|$

und $\|A\| \ge \|Ae_i\| = \|\sum_j a_{ij} e_j\| \ge |a_{ij}|$

$$\Rightarrow \quad \max\{|a_{ij}| \mid i,j = 1, \dots N\} \le \|A\| \le \sum_{ij} |a_{ij}|$$

Unter $M_N(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{N^2}$ ist $\|A\|_{max\text{-Norm}} \le \|A\| \le \|A\|_1$

und $(\mathbb{R}^{N^2}, \|\cdot\|_{max})$, $(\mathbb{R}^{N^2}, \|\cdot\|_1)$ vollständig $\Rightarrow (M_N(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ vollst.

$\square$ (1.)

2.) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}$ konvergiert in $M_N(\mathbb{R})$

und der Grenzwert $e^{A(t-t_0)} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}$ existiert also in $M_N(\mathbb{R})$.

Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^N$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n A^n x}{n!}$ gegen $e^{A(t-t_0)} x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis von 2.): Da für Matrizen A, B gilt: $\|AB\| \le \|A\| \|B\|$, habe $\|A^n\| \le \|A\|^n$.

Also $\left\|\frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}\right\| \le \frac{|t-t_0|^n}{n!} \|A\|^n$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n |t-t_0|^n}{n!} = e^{\|A\| |t-t_0|} \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \left\| \sum_{n=0}^{m+k} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{m} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!} \right\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{m+k} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!} \right\| \le \sum_{n=m+1}^{m+k} \frac{\|A\|^n |t-t_0|^n}{n!} \le \varepsilon$$

für großes m

$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy in $M_N(\mathbb{R}) \overset{1.)}{\Rightarrow}$ Grenzwert ex.

Und $\left\| e^{A(t-t_0)} x - \sum_{n=0}^{m} \frac{(t-t_0)^n A^n x}{n!} \right\| \le \underbrace{\left\| e^{A(t-t_0)} - \sum_{n=0}^{m} \frac{(t-t_0)^n A^n}{n!} \right\|}_{\to 0} \|x\|$ $\square$ (2.)

3.) Nach 11.4 (und 11.3b) ist $Au = u'$ eindeutig lösbar, dann 11.7. $\square$

11.9 Beispiel (11.6 revisited).

a) Lösung von $u' = u$, $u(0) = c$? Mit $N=1$, $A = \mathrm{id}$ ist nach 11.8 $u(t) = ce^t$ die eindeutige Lösung.

b) Lösung von $\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1 \end{aligned}$, $u(0) = (a,b)$?

Mit $u' = Au$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $u(t) = e^{At}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ die Lösung.

Berechne also $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$, $A^3 = -A$, ...

Also
$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m} t^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m+1} t^{2m+1}}{(2m+1)!}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!} E + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!} A$$
$$= \cos t \cdot E + \sin t \cdot A$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $u(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ eindeutige Lösung.

11.10 Satz: Das DGL-System 1.ter Ordnung („~~affin~~ linear")

$$Au + b = u' \text{ mit } u(t_0) = x_0, \quad A \in M_N(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^N$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \frac{e^{(t-t_0)A} - 1}{A} b.$$

Beweis: 1.) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} A^{n-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!}$ konvergiert in $M_N(\mathbb{R})$ und der Grenzwert $\frac{e^{(t-t_0)A} - 1}{A}$ existiert also in $M_N(\mathbb{R})$.

Beweis von 1.): $\left\| A^{n-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^{n-1} |t-t_0|^n}{n!}$

und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^{n-1} |t-t_0|^n}{n!} = \frac{e^{|t-t_0| \|A\|} - 1}{\|A\|}$

$\xRightarrow{\text{wie in 11.8, Schritt 2.)}} \left(\sum_{n=1}^{m} A^{n-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy in $M_N(\mathbb{R})$. $\square$(1.)

2.) Nach 11.4 ist $Au+b=u'$ mit AWP eindeutig lösbar per:
$f(x) = Ax+b$

$$g(t) \equiv x_0$$

$$Tg(t) = \int_{t_0}^{t} f(g(s))\, ds + x_0 = \int_{t_0}^{t} (Ax_0+b)\, ds + x_0 = x_0 + Ax_0(t-t_0) + b(t-t_0)$$

$$T^2g(t) = \int_{t_0}^{t} (Ax_0 + A^2x_0(s-t_0) + Ab(s-t_0) + b)\, ds + x_0$$

$$= x_0 + Ax_0(t-t_0) + A^2x_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + Ab\frac{(t-t_0)^2}{2} + b(t-t_0)$$

$$T^n g(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{A^m (t-t_0)^m}{m!} x_0 + \sum_{m=1}^{n} A^{m-1} \frac{(t-t_0)^m}{m!} b$$

$$\xrightarrow{11.8 \,\&\, 1.)} e^{A(t-t_0)} x_0 + \frac{e^{(t-t_0)A} - 1}{A} b \overset{11.4}{=} u(t).$$

$\square$

11.11 Bemerkung: Wissen jetzt über DGL mit AWP:

	$N=1$	$N \geq 2$
$n=1$	Existenz, Eindeutigkeit, Verfahren: 11.4 Linearer Fall: sogar explizite Lösung 11.8 (komplett gelöst) affin linear: " 11.10 "	
$n \geq 2$	per 10.3 auf obige Zeile zurückgeführt	?