§12 Fundamentallösungen für lineare DGL n-ter Ordnung (ohne AWP)

12.1 Lemma: Sei $P(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom, $a_i \in \mathbb{C}$.

Sei $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ ist unendlich oft differenzierbar$\}$.

Sei $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f \longmapsto f'$ der Ableitungsoperator. (d.h. $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ und $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$)

a) Die lineare DGL n-ter Ordnung
$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - a_{n-2}y^{(n-2)} - \ldots - a_1 y' - a_0 y - b$$
ist äquivalent zu $P(D)y + b = 0$ (also $u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u + b = 0$)

bzw. zu $A\tilde{u} + \tilde{b} = \tilde{u}'$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

b) P ist das charakteristische Polynom der Matrix A aus a).

Beweis: a) Äquivalenz von $u^{(n)} = -a_{n-1}u^{(n-1)} \ldots -a_0 u - b$ und $P(D)u + b = 0$ klar.

Mit $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$ ist
$$\tilde{u}' = A\tilde{u} + \tilde{b} \iff \begin{aligned} \tilde{u}_1' &= \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2' &= \tilde{u}_3 \\ &\vdots \\ \tilde{u}_{n-1}' &= \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_n' &= -a_0\tilde{u}_1 - a_1\tilde{u}_2 - \ldots - a_{n-1}\tilde{u}_n - b \end{aligned} \iff P(D)\tilde{u}_1 + b = 0$$
(vgl. 10.3)

$(\iff \tilde{u}_n' + a_{n-1}\tilde{u}_n + \ldots + a_1\tilde{u}_2 + a_0\tilde{u}_1 + b = 0)$

b)
$$\det(\lambda - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach n-ter Zeile liefert $\det(\lambda - A) = P(\lambda)$. $\square$

12.2 Satz: Wir betrachten die lineare DGL n-ter Ordnung

$$(P(D)u + b =) u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_0 u + b = 0 \quad , a_i, b \in \mathbb{R}$$

a) Die DGL besitzt für jedes $z \in \mathbb{R}^n$ und jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ genau eine unendlich oft differenzierbare Lösung $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit AWP $u(t_0) = z_1, \dots u^{(n-1)}(t_0) = z_n$).

b) Ist $b = 0$, so heißt die DGL homogen. Die Lösungen der DGL (ohne AWP) bilden einen n-dim. Vektorraum V (über $\mathbb{R}$), die Fundamentallösungen der DGL.

c) Ist $b \neq 0$, so heißt die DGL inhomogen. Die Lösungen der DGL bilden einen affinen Vektorraum, d.h. es gibt eine spezielle Lösung u_s der DGL, so dass alle Lösungen der DGL der Form $u = u_s + u_h$ sind, wobei u_h eine Lösung der assoziierten homogenen DGL ist. Der Lösungsraum ist also der Form $u_s + V$.

> **12.3 Bemerkung:** Gegeben $P(D)u + b = 0$. Suche spezielle Lösung u_s.
> Für $a_0 \neq 0$: wähle $u_s(t) = \frac{-b}{a_0}$.
> Für $a_0 = 0, a_1 \neq 0$: wähle $u_s(t) = \frac{-bt}{a_1}$, etc.

Beweis: a) Nach 10.3 ist die DGL äquivalent zu einem DGL-System ($N = n$) 1. Ordnung, nach 11.4 hat das AWP also eine eindeutige Lösung

$$\tilde{u}(t) = e^{A(t-t_0)} z + \frac{e^{A(t-t_0)} - 1}{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

und ist also unendlich oft diffbar.

b) Sind u und v Lösungen $P(D)u = P(D)v = 0$, so auch $\alpha u + \beta v$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, denn $P(D)(\alpha u + \beta v) = \alpha P(D) u + \beta P(D) v = 0$.
$\left((\alpha u + \beta v)^{(k)} = \alpha u^{(k)} + \beta v^{(k)} \right)$

Also ist der Lösungsraum V ein Vektorraum.

Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to V$, $z \mapsto u_z$, wobei u_z die Lösung der DGL für das AWP z ist, ist linear ($\alpha u_z + \beta u_{z'}$ Lösung der DGL mit AWP $\alpha z + \beta z'$
$\Rightarrow u_{\alpha z + \beta z'} = \alpha u_z + \beta u_{z'}$, da Lsg eindeutig $\Rightarrow \varphi$ linear), injektiv (Eind. der Lösung) und surjektiv. Also $V \cong \mathbb{R}^n$ als Vektorraum, d.h. V ist n-dimensional.

c) Sei u_s eine Lösung der inhomogenen DGL und u_h eine der assoziierten homogenen DGL.
Dann: $P(D)(u_s+u_h)+b = \underbrace{(P(D)u_s+b)}_{=0} + \underbrace{P(D)u_h}_{=0} = 0$.
Sei umgekehrt u eine Lösung der DGL. Setze $u_h := (u-u_s)$.
Dann $P(D)u_h = \underbrace{(P(D)u+b)}_{=0} - \underbrace{(P(D)u_s+b)}_{=0} = 0$, d.h. u_h ist Lösung der assoziierten homogenen DGL und $u = u_s + u_h \in u_s + V$. □

12.4 Korollar: Wir betrachten $u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_0 u + b = 0$, $a_i, b \in \mathbb{C}$.
Dann gilt 12.2 entsprechend: Die DGL besitzt für jedes $z \in \mathbb{C}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ genau eine unendlich oft differenzierbare Lösung $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit AWP z, der Lösungsraum der assoziierten homogenen DGL ist ein n-dim. $\mathbb{C}$-VR und jener der inhomogenen DGL ist ein affiner $\mathbb{C}$-VR.
Beweis: $u = \mathrm{Re}\,u + i\,\mathrm{Im}\,u$ liefert die Systeme $P(D)(\mathrm{Re}\,u) + \mathrm{Re}\,b = 0$ AWP Re z
$P(D)(\mathrm{Im}\,u) + \mathrm{Im}\,b = 0$ AWP Im z
mit Lösungen Re u und Im u $\Rightarrow$ $u = \mathrm{Re}\,u + i\,\mathrm{Im}\,u$ Lsg. des komplexen Systems. □

12.5 Satz: Wir betrachten die DGL $P(D)u = 0$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$.
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von P mit Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$.
Dann bildet $\{t \mapsto e^{\lambda_j t}, t \mapsto t e^{\lambda_j t}, \ldots, t \mapsto t^{(k_j-1)} e^{\lambda_j t} \mid j = 1, \ldots, r\}$ ein Fundamentalsystem der DGL, d.h. eine Basis des Lösungsraums.
Also ist jede Lösung der DGL eine Linearkombination (über $\mathbb{C}$) dieser Lösungen.
($k_1 + \ldots + k_r = n$). Dieses Lösungsverfahren heißt auch Exponentialansatz.
Beweis: 1.) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist:
$$P(x) = (x-\lambda_1)^{k_1} \ldots (x-\lambda_r)^{k_r}$$
3.) Jede Funktion $t \mapsto t^{k}$[redacted]$e^{\lambda_j t}$ ist eine Lösung der DGL, $0 \le k \le k_j - 1$.
2.): Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann ist $(D-\lambda_j)(f(t)e^{\lambda_j t}) = f'(t)e^{\lambda_j t}$.
Bew. zu 2.): $(D-\lambda_j)(f(t)e^{\lambda_j t}) = (f'(t)e^{\lambda_j t} + f(t)\lambda_j e^{\lambda_j t}) - (\lambda_j f(t) e^{\lambda_j t}) = f'(t)e^{\lambda_j t}$ □(2)
Bew. zu 3.): $(D-\lambda_j)^{k_j}(t^k e^{\lambda_j t}) = (t^k)^{(k_j)} e^{\lambda_j t} = 0$ für $k < k_j$
$\Rightarrow P(D)(t^k e^{\lambda_j t}) = (D-\lambda_1)^{k_1} \ldots (D-\lambda_r)^{k_r}(t^k e^{\lambda_j t}) =$
$= (D-\lambda_1)^{k_1} \ldots (D-\lambda_{j-1})^{k_{j-1}} (D-\lambda_{j+1})^{k_{j+1}} \ldots (D-\lambda_r)^{k_r} (D-\lambda_j)^{k_j}(t^k e^{\lambda_j t})$
$= 0$ für $k < k_j$
□(3.)

4.) Die Abbildungen $\{t \mapsto t^k e^{\lambda_j t} \mid 0 \le k < k_j,\ j=1,\dots,r\}$ sind linear unabhängig.

Beweis von 4.): Sei f eine Linearkombination obiger Funktionen, d.h.

$f(t) = p_1(t)\,e^{\lambda_1 t} + \dots + p_r(t)\,e^{\lambda_r t}$, wobei p_j Polynome vom Grad $< k_j$ sind.

(denn $f(t) = \underbrace{\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 t e^{\lambda_1 t} + \alpha_3 t^2 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_{k_1-1} t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}}_{= (\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \dots + \alpha_{k_1-1} t^{k_1-1})\, e^{\lambda_1 t}} + \underbrace{\beta_1 e^{\lambda_2 t} + \dots}_{\dots}$)

Sei $f(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

zz: $p_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, für $j = 1,\dots,r$.

Induktion nach r. $r=1$: $p(t)\,e^{\lambda t} \equiv 0 \ \forall t \Rightarrow p(t) \equiv 0$, da sonst $\lim_{t\to\infty} p(t)\,e^{\lambda t} = \pm\infty$

$r \to r+1$: Sei $f(t) = \sum_{j=1}^{r+1} p_j(t)\,e^{\lambda_j t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Dann ist $(D - \lambda_{r+1})^{k_{r+1}} \left(p_{r+1}(t)\,e^{\lambda_{r+1} t}\right) \overset{2.)}{=} 0$

und $(D - \lambda_{r+1})^{k_{r+1}} \left(p_j(t)\,e^{\lambda_j t}\right) = q_j(t)\,e^{\lambda_j t}$ mit $\operatorname{grad} q_j = \operatorname{grad} p_j$, für $j = 1,\dots,r$

Denn: $(D - \lambda_{r+1})^{k_{r+1}} \left(p_j(t)\,e^{\lambda_j t}\right)$

$= \big((D - \lambda_j) + \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{r+1})}_{=:\lambda'}\big)^{k_{r+1}} \left(p_j(t)\,e^{\lambda_j t}\right)$

$\overset{\text{binom. Formel}}{=} \left((D-\lambda_j)^{k_{r+1}} + \alpha_{k_{r+1}-1}(D-\lambda_j)^{k_{r+1}-1} + \dots + \alpha_0\right)\left(p_j(t)\,e^{\lambda_j t}\right)$

$\overset{2.)}{=} \underbrace{\left(p_j^{(k_{r+1})}(t) + \alpha_{k_{r+1}-1}\, p_j^{(k_{r+1}-1)} + \dots + \alpha_0\, p_j(t)\right)}_{=:\, q_j(t)} \left(e^{\lambda_j t}\right)$

Und da $\alpha_0 = \lambda'^{\,k_{r+1}} \neq 0$, ist $\operatorname{grad} q_j = \operatorname{grad} p_j$

Da $f(t) \equiv 0$, ist auch

$0 = (D - \lambda_{r+1})^{(k_{r+1})} \left(p_1(t)\,e^{\lambda_1 t} + \dots + p_r(t)\,e^{\lambda_r t} + p_{r+1}(t)\,e^{\lambda_{r+1} t}\right)$

$= q_1(t)\,e^{\lambda_1 t} + \dots + q_r(t)\,e^{\lambda_r t} + 0 \ \cancel{(\text{nach } 2.)}$

$\overset{\text{I.Vor.}}{\Longrightarrow} q_j(t) \equiv 0$ für $j = 1,\dots,r$ $\overset{\operatorname{grad} q_j = \operatorname{grad} p_j}{\Longrightarrow} p_j(t) = 0$ für $j = 1,\dots,r$

$\Longrightarrow 0 = f(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j(t)\,e^{\lambda_j t} + p_{r+1}(t)\,e^{\lambda_{r+1} t} = p_{r+1}(t)\,e^{\lambda_{r+1} t}$

$\overset{\text{I.B.}(r=1)}{\Longrightarrow} p_{r+1}(t) = 0$

$\square$ (4.)

$\square$ (12.5)

12.6 Korollar: Betrachte $P(D)u=0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von P. Dann sind
Linearkombinationen von $t \mapsto t^k e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \sin(\operatorname{Im}\lambda_j t)$ und
$t \mapsto t^k e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \cos(\operatorname{Im}\lambda_j t)$ Lösungen der DGL $(0 \le k < k_j)$.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda)=0$. Dann auch $P(\bar\lambda) = \overline{P(\lambda)} = 0$.
Ist also $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ eine Lösung der DGL, so auch $t \mapsto t^k e^{\bar\lambda t}$.
Da $t^k e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \sin \operatorname{Im}\lambda_j t = \operatorname{Im}\Big(\underbrace{t^k e^{\overbrace{(\operatorname{Re}\lambda_j + i \operatorname{Im}\lambda_j)}^{\lambda_j} t}}_{a+ib}\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\underbrace{t^k e^{\lambda_j t}}_{a+ib} - \underbrace{t^k e^{\bar\lambda_j t}}_{a-ib}\Big)$
und $t^k e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \cos \operatorname{Im}\lambda_j t = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{t^k e^{\lambda_j t}}_{Lsg} + \underbrace{t^k e^{\bar\lambda_j t}}_{Lsg}\Big)$, folgt die Aussage. $\square$

12.7 Beispiele:

a) $u'' + u' - 2u = 0$. Also $P(x) = x^2 + x - 2$ mit Nullstellen
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, je mit Vielfachheit 1.
Also Fundamentalsystem $t \mapsto e^t$, $t \mapsto e^{-2t}$,
d.h. allgemeine komplexe Lösung $a e^t + b e^{-2t}$, $a, b \in \mathbb{C}$,
allgemeine reelle Lösung $a e^t + b e^{-2t}$, $a, b \in \mathbb{R}$. (nach 12.6)
Und a, b durch AWP bestimmt.

b) $u'' + 2u' + u = 0$, also $P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, doppelte Nullstelle $\lambda = -1$
Allgemeine Lösung $a e^{-t} + b t e^{-t}$, $a, b \in \mathbb{C}$ oder $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $u'' + u = 0$, also $P(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$, Nullstellen $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.
Allgemeine komplexe Lösung: $a e^{it} + b e^{-it}$, $a, b \in \mathbb{C}$
Allgemeine reelle Lösung: $a \sin t + b \cos t$, $a, b \in \mathbb{R}$ (nach 12.6)