# §13 lineare DGL n-ter Ordnung mit variablen Koeffizienten (ohne AWP)

**13.1 Satz:** Wir betrachten das lineare DGL-System 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten: $A(t)u + b(t) = u'$

wobei $t \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $t \mapsto A(t) \in M_N(\mathbb{C})$ stetig, $t \mapsto b(t) \in \mathbb{C}^N$ stetig.

a) Das DGL-System besitzt für jedes AWP $t_0 \in \mathbb{R}$, $u(t_0) = x_0 \in \mathbb{C}^N$ genau eine Lösung $u : I \to \mathbb{C}^N$.

b) Die Lösungen des homogenen DGL-Systems $A(t)u = u'$ (ohne AWP) bilden einen N-dimensionalen Vektorraum $V$.

c) Die Lösungen des inhomogenen DGL-Systems $A(t)u + b(t) = u'$ (ohne AWP) bilden einen affinen Vektorraum $u_s + V$, wobei $u_s$ eine spezielle Lösung des inhomogenen DGL-Systems ist.

d) Seien $u_1, \ldots, u_N$ Lösungen des homogenen DGL-Systems $A(t)u = u'$ (ohne AWP). Dann sind äquivalent:

(i) Die $u_1, \ldots, u_N$ bilden ein Fundamentalsystem (sind also eine Basis von $V$)

(ii) $\exists t_0 \in I$: $\det \underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t_0) & \ldots & u_N(t_0) \end{pmatrix}}_{\in M_N(\mathbb{C})} \neq 0$

(iii) $\forall t_0 \in I$: "

**Beweis:** a) 1. Fall: $I = [a,b]$ kompakt.

Setze $L := \max\{\|A(t)\| \mid t \in I\}$. Dann ist $f(t,x) := A(t)x + b(t)$ uniform Lipschitz-stetig in $t$, d.h.

$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)(x-y)\| \leq \|A(t)\|\|x-y\| \leq L\|x-y\| \quad \forall t,x,y$

$\overset{11.4}{\Longrightarrow}$ Lösung ex. auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subseteq I$ für ein bestimmtes $\alpha \in \mathbb{R}$ wenn $I = [t_0 - c, t_0 + c]$

Aber was ist für ganz $I$?

Betrachte $T: \mathcal{C}(I,\mathbb{C}^N) \to \mathcal{C}(I,\mathbb{C}^N)$, $(Th)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)h(s)+b(s))\,ds$.
$\mathcal{C}(I,\mathbb{C}^N) := \{f: I \to \mathbb{C}^N \text{ stetig}\}$

Dann für $h,g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C}^N)$:

$$\begin{aligned}
&\|Th(t) - Tg(t)\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(h(s)-g(s))\,ds \right\| \\
&\le \int_{t_0}^{t} L\,\|h(s)-g(s)\|\,ds \\
&\le L\,|t-t_0|\,\|h-g\|_\infty
\end{aligned}$$

Induktiv (wie in 11.4): $\|T^n h(t) - T^n g(t)\| \le \underbrace{\frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}}_{\to 0}\|h-g\|_\infty$

$\Rightarrow \forall h \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C}^N)$: $(T^n h)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathcal{C}(I,\mathbb{C}^N)$, d.h. es ex. $u := \lim_{n\to\infty} T^n h \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C}^N)$ und $u$ hängt nicht von $h$ ab, $Tu = u$, d.h. $u$ löst $A(t)u + b(t) = u'$.

2. Fall: $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall.
Wähle kompakte Intervalle $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $J_n \subseteq J_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$. Sei $u_n$ die eindeutige Lösung auf $J_n$.
Definiere $u: I \to \mathbb{C}^N$ durch $u|_{J_n} := u_n$. Dann ist $u$ wohldefiniert, denn für $n<m$ ist $u_m|_{J_n}$ Lösung auf $J_n$ (ist ja sogar Lösung auf $J_n \subseteq J_m$) und nach der Eindeutigkeit $u_m|_{J_n} = u_n$.

b) Wie in 12.2 gilt für Lösungen $u$ und $v$ (also $A(t)u = u'$, $A(t)v = v'$) auch $A(t)(\alpha u + \beta v) = \alpha A(t)u + \beta A(t)v = \alpha u' + \beta v' = (\alpha u + \beta v)'$, d.h. der Lösungsraum ist ein Vektorraum und für $t_0 \in I$ ist
$\varphi_{t_0}: V \to \mathbb{C}^N$, $u \mapsto u(t_0)$ ein Isomorphismus, also $V$ $N$-dimensional. ✓
(linear: klar, injektiv: $u(t_0)=v(t_0) \Rightarrow u,v$ lösen selbes AWP $\Rightarrow u=v$, surjektiv: a)).

c) Sei $u_s$ eine spezielle Lösung $A(t)u_s + b(t) = u_s'$ und $v: I \to \mathbb{C}^N$ eine beliebige Funktion. Dann:
$u_s+v$ Lösung von $A(t)u+b(t)=u'$ $\iff$ $v$ Lösung von $A(t)u=u'$
(d.h. $\underbrace{A(t)u_s+b(t)}_{=u_s'} + A(t)v = u_s'+v'$)

Also ist der Lösungsraum von $A(t)u+b(t)=u'$ der Form $u_s+V$.

d) Sei $t_0 \in I$. Dann:

$u_1, \dots u_N$ linear unabhängig

$\Leftrightarrow u_1(t_0), \dots u_N(t_0)$ linear unabhängig

[ $\varphi_{t_0}$ aus b) ist ein Isomorphismus, also $u_1, \dots u_N$ l.u. $\Leftrightarrow \varphi_{t_0}(u_1), \dots \varphi_{t_0}(u_N)$ l.u. ]

$\Leftrightarrow \det(u_1(t_0) \dots u_N(t_0)) \neq 0$

$\square$

**13.2 Satz:** Wir betrachten $A(t)u + b(t) = u'$ unter den Voraussetzungen wie in 13.1.

Sei $u_1, \dots u_N$ ein Fundamentalsystem von $A(t)u = u'$.

Setze $\Phi(t) := (u_1(t) \dots u_N(t)) \in M_N(\mathbb{C})$. Also $\Phi(t)$ für alle $t \in I$ invertierbar nach 13.1.

a) Sei $u_0 : I \to \mathbb{C}^N$ differenzierbar und $\Phi(t) u_0'(t) = b(t) \ \forall t \in I$.
Dann ist $u(t) := \Phi(t) u_0(t)$ eine Lösung von $A(t)u + b(t) = u'$.

b) Die Funktion $u_0(t) := \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s)\, ds + C$, $C \in \mathbb{C}^N$ erfüllt $\Phi(t) u_0'(t) = b(t) \ \forall t \in I$ und $u_0(t_0) = C$.

__Beweis:__ a) $\Phi'(t) = (u_1'(t) \dots u_N'(t)) = (A(t)u_1(t) \dots A(t)u_N(t))$
$= A(t)\Phi(t)$

da jedes $u_j$ eine Lösung $A(t)u_j = u_j'$ ist.

Also $u'(t) \underset{\uparrow}{=} \Phi'(t)u_0(t) + \Phi(t)u_0'(t) = A(t)\underbrace{\Phi(t)u_0(t)}_{u(t)} + \underbrace{\Phi(t)u_0'(t)}_{=b(t)}$

$\to$ Produktregel in jeder Komponente

[ $u(t) = \Phi(t)u_0(t) \in \mathbb{C}^N$, d.h. $u(t) = \begin{pmatrix} \sum_k \Phi_{1k}(t) u_{0,k}(t) \\ \vdots \\ \sum_k \Phi_{Nk}(t) u_{0,k}(t) \end{pmatrix}$

und $\left(\sum_k \Phi_{ik}(t) u_{0,k}(t)\right)' = \sum_k \left(\Phi_{ik}'(t) u_{0,k}(t) + \Phi_{ik}(t) u_{0,k}'(t)\right)$

b) $u_0(t)' = \Phi^{-1}(t) b(t)$ nach dem HSDI.

$\square$

**13.3 Beispiel:** $u_1' = -u_2$ (Bsp. 11.9 → variable Konstanten)
$u_2' = -u_1 + t$

also $u' = Au + b$ mit $A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$.

Betrachte das homogene System $u' = Au$.

Erinnerung (Bsp. 11.9): $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (Inverses: $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$)

Nach Bsp. 11.9 ist $\tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

~~die~~ Lösung des AWP $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\tilde{u}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ genau für $u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ sind Lösungen des homogenen DGL-Systems $u' = Au$.

Da für $\Phi(t) = e^{At} = (\tilde{u}_1(t) \; \tilde{u}_2(t))$ schon $\det \Phi(t) \neq 0$ gilt, bilden $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ ein Fundamentalsystem der DGL nach 13.1.

Nach 13.2 also
$$u_0(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds + C$$
$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds + C$$
$$= \int_0^t \begin{pmatrix} -s \sin s \\ s \cos s \end{pmatrix} ds + C$$
$$= \begin{pmatrix} -\sin t + t\cos t \\ \cos t + t \sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C$$

mit $\Phi(t)\, u_0'(t) = b(t)$ und
$$u(t) = \Phi(t)\, u_0(t)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -\sin t + t\cos t \\ \cos t + t\sin t - 1 \end{pmatrix} + C\right]$$
$$= \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Lösung von $A(t)u + b(t) = u'$.

Probe:
$u_1(t) = t - \sin t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$
$u_1'(t) = 1 - \cos t - C_1 \sin t + C_2 \cos t = u_2(t)$
$u_2'(t) = \sin t - C_1 \cos t - C_2 \sin t = -u_1(t) + t$

**13.4 Satz:** Wir betrachten die lineare DGL $n$-ter Ordnung mit variablen Koeffizienten:

$$u^{(n)} = a_{n-1}(t)\,u^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\,u^{(n-2)} + \dots + a_0(t)\,u + b(t)$$

wobei alle Funktionen $t \mapsto \underset{\in \mathbb{C}}{a_j(t)}$, $t \mapsto \underset{\in \mathbb{C}}{b(t)}$ stetig sind, $t \in I$, $\underset{\text{Intervall.}}{I \subseteq \mathbb{R}}$

a) Für jedes AWP $t_0 \in \mathbb{R}$, $u(t_0) = z_1, \dots, u^{(n-1)} = z_n$, $z \in \mathbb{C}^n$ gibt es genau eine Lösung $u : I \to \mathbb{C}$.

b) Die Lösungen der homogenen DGL ($b = 0$) bilden einen $n$-dimensionalen Vektorraum $V$.

c) Die Lösungen der inhomogenen DGL (i.A. $b \neq 0$) bilden einen affinen Vektorraum $u_s + V$, wo $u_s$ eine spezielle Lösung ist.

d) Lösungen $u_1, \dots, u_n$ der homogenen DGL bilden ein Fundamentalsystem genau dann, wenn für die Wronski-Determinante gilt:

$$w(t) := \det \begin{pmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & & u_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für ein } t \in I$$

(und damit für alle $t \in I$).

**Beweis:** Die DGL ist im Sinne von Lemma 10.3 äquivalent zu

$$\tilde{u}' = A(t)\tilde{u} + \tilde{b}(t) \text{ mit } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Nach 13.1 gilt also obige Aussage.

Benutze für b) und d) also im Wesentlichen den Isomorphismus

$$\varphi_t : V \to \mathbb{C}^n, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \leftrightarrow \tilde{u}(t)$$

$\square$

**13.5 Korollar:** Sind alle Koeffizientenfunktionen $t\mapsto a_j(t)$, $t\mapsto b(t)$ reellwertig in 13.4, so ist $\operatorname{Re} u: I\to\mathbb{R}$ eine Lösung der DGL, wenn $u: I\to\mathbb{C}$ eine Lösung nach 13.4 ist.
Sind bloß die $t\mapsto a_j(t)$ reellwertig, aber $t\mapsto b(t)$ komplexwertig, so ist $\operatorname{Re} u: I\to\mathbb{R}$ eine Lösung der DGL mit Koeffizienten $a_j(t)$, $\operatorname{Re} b(t)$, wenn $u$ die DGL mit Koeffizienten $a_j(t), b(t)$ löst.

**Beweis:** Ist $u$ eine Lösung von $u^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)} + b(t)$, so löst $\bar{u}$ die DGL $\bar{u}^{(n)} = \sum_j a_j(t)\bar{u}^{(j)} + \overline{b(t)}$.
Also ist $\operatorname{Re} u = \frac{1}{2}(u+\bar{u})$ eine Lösung von $u^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)} + \underbrace{\operatorname{Re} b(t)}_{=\frac{1}{2}(b(t)+\overline{b(t)})}$

□

**13.6 Proposition:** Sei $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ ein Polynom.
Sei $k\in\mathbb{N}_0$ und sei $\mu\in\mathbb{C}$ eine $k$-fache Nullstelle von $P$ (für $k=0$: $P(\mu)\neq 0$). Sei $b(t) = (b_0+b_1t+\dots+b_mt^m)e^{\mu t}$, für $m\in\mathbb{N}_0$.
Dann besitzt die DGL $P(D)u = b(t)$ eine Lösung
$u(t) = (c_0+c_1t+\dots+c_mt^m)t^ke^{\mu t}$ (mit $c_0 = \frac{b_0}{P^{(k)}(\mu)}$ falls $m=0$).

**Beweis:** $P(x) = Q(x)(x-\mu)^k$, da $\mu$ $k$-fache Nullstelle, $\operatorname{grad} Q = \operatorname{grad} P - k$, $Q(\mu)\neq 0$.

Induktion nach $m$.
I.B. $m=0$: Also $b(t) = b_0e^{\mu t}$. zz: $u(t) := \frac{b_0}{P^{(k)}(\mu)} t^k e^{\mu t}$ löst $P(D)u = b(t)$.

$$P(D)(t^ke^{\mu t}) = Q(D)(D-\mu)^k(t^ke^{\mu t}) \overset{\text{2.) vom Beweis in 12.5}}{=} k!\,Q(D)e^{\mu t} \underset{(De^{\mu t}=\mu e^{\mu t})}{=} k!\,Q(\mu)e^{\mu t}$$

und
$$P^{(k)}(x) = \left(Q'(x)(x-\mu)^k + kQ(x)(x-\mu)^{k-1}\right)^{(k-1)}$$
$$= \left(Q^{(2)}(x)(x-\mu)^k + 2kQ'(x-\mu)^{k-1} + k(k-1)Q(x)(x-\mu)^{k-2}\right)^{(k-2)}$$
$$\overset{\text{Induktion}}{=} Q^{(k)}(x)(x-\mu)^k + d_1Q^{(k-1)}(x)(x-\mu)^{k-1}+\dots+k!\,Q(x)$$
$\Rightarrow P^{(k)}(\mu) = k!\,Q(\mu)$.

Also $P(D)\left(\frac{b_0}{P^{(k)}(\mu)}t^ke^{\mu t}\right) = \frac{b_0}{P^{(k)}(\mu)}k!\,Q(\mu)e^{\mu t} = b_0e^{\mu t} = b(t)$

I.S. $m \mapsto m+1$: Es gibt ein Polynom $h$ mit $\operatorname{grad} h = m+1$, so dass
$$P(D)(t^{m+1} t^k e^{\mu t}) = Q(D)\left(\frac{(m+1+k)!}{(m+1)!} t^{m+1} e^{\mu t}\right) = h(t) e^{\mu t}.$$
$$\Big( D t^{m+1} e^{\mu t} = (m+1) t^m e^{\mu t} + \mu \underbrace{t^{m+1}}_{\text{grad } m+1} e^{\mu t} \Big)$$
Sei $c_m \in \mathbb{C}$, so dass $q(t) := (b_0 + b_1 t + \dots + b_{m+1} t^{m+1}) - c_{m+1} h(t)$ vom Grad $\le m$ ist.
Betrachte $P(D) v = q(t) e^{\mu t}$. Nach der I.Vor. ex. eine Lösung $v(t) = r(t) t^k e^{\mu t}$, wobei $r$ ein Polynom vom Grad $\le m$ ist.
Setze $u(t) := (r(t) + c_{m+1} t^{m+1}) t^k e^{\mu t}$. Dann gilt:
$$\begin{aligned} P(D) u(t) &= P(D) v(t) + c_{m+1} P(D)(t^{m+1} t^k e^{\mu t}) \\ &= q(t) e^{\mu t} + c_{m+1} h(t) e^{\mu t} \\ &= (b_0 + b_1 t + \dots + b_{m+1} t^{m+1}) e^{\mu t} \end{aligned}$$
□

13.7 Beispiel: a) $u'' - 2u' + u = e^t$.
homogenes System $u'' - 2u' + u = 0$ mit $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
Fundamentalsystem: $e^t$, $te^t$
Spezielle Lösung nach 13.6 mit $m = 0$, $\mu = 1$, $b(t) = e^t$, $b_0 = 1$, $k = 2$:
$u_s(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t$, denn $c_0 = \frac{b_0}{P^{(2)}(\mu)} = \frac{1}{P''(\mu)} = \frac{1}{2}$.
Also allgemeine Lösung: $u(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t + a e^t + b t e^t$, $a, b \in \mathbb{C}$

b) $u'' - 2u' + u = e^{2t}$. Homogenes System wie in a).
Spezielle Lösung wie in a) nur mit $\mu = 2$, $k = 0$, $b(t) = e^{2t}$, also
$\frac{b_0}{P(\mu)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow u(t) = e^{2t} + a e^t + b t e^t$

c) $u'' - 2u' + u = \cos t$. Betrachte $u'' - 2u' + u = e^{it}$.
Homogenes System wie in a), also $e^t$, $te^t$ Fundamentalsystem, $\frac{b_0}{P(i)} = \frac{1}{2} i$.
$\Rightarrow$ Lösung $u(t) = \frac{1}{2} i e^{it} + a e^t + b t e^t$, $a, b \in \mathbb{C}$ von $u'' - 2u' + u = e^{it}$.
$\overset{13.5}{\Longrightarrow}$ $t \mapsto -\frac{1}{2} \sin t + a e^t + b t e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$ Lösung von $u'' - 2u' + u = \cos t$.