§14 DGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen
(Nachtrag zu §11)

14.1 Satz: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ stetig, $g(x) \neq 0 \ \forall x \in J$. Sei $t_0 \in I$, $x_0 \in J$.
Seien $F: I \to \mathbb{R}$ und $G: J \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds, \quad G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y)}\,dy.$$

Sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $t_0 \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J)$.
Betrachte die DGL 1. Ordnung

$$u' = f(t)\,g(u) \qquad \text{mit AWP } u(t_0) = x_0.$$

Die DGL besitzt genau eine Lösung $u: I' \to \mathbb{R}$, $u(t_0) = x_0$.
Die Lösung erfüllt $G(u(t)) = F(t) \quad \forall t \in I'$.
Um eine Lösung der DGL zu finden, kann man also zunächst die Gleichung $G(u) = F$ lösen.

Beweis: 1.) Ist u eine Lösung der DGL, so gilt $G(u) = F$.
Bew. von 1.):

$$G(u(t)) = \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{1}{g(y)}\,dy \underset{\text{Substitution } y=u(s)}{=} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(u(s))} \cdot u'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\,g(u(s))}{g(u(s))}\,ds \overset{}{=} F(t)$$

□(1.)

2.) Die Lösung u der DGL ist eindeutig.
Bew. von 2.): $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0 \quad \forall x \in J \Rightarrow G$ ist streng monoton
(nach dem MWS ex. sonst x mit $G'(x) = 0$)
$\Rightarrow \exists: H: G(J) \to \mathbb{R}$ mit $H(G(x)) = x \quad \forall x \in J$, $G(H(y)) = y \quad \forall y \in G(J)$
Ist also u eine Lösung der DGL, so gilt nach 1.) schon
$G(u(t)) = F(t) \quad \forall t \in I'$. Also $u(t) = H(F(t)) \quad \forall t \in I$.
Somit ist u eindeutig bestimmt.

□(2.)

3.) Die DGL besitzt eine Lösung.

Beweis von 3.): Setze $u(t) := H(F(t))$ mit H aus 2.).
Da H differenzierbar ist (Diffbarkeit der Umkehrfunktion, Analysis I), ist u diffbar. Aus $G(u(t)) = G(H(F(t))) = F(t) \quad \forall t \in I$

folgt $f(t) = F'(t) = G'(u(t))\,u'(t) = \frac{1}{g(u(t))} u'(t)$

$\Rightarrow u'(t) = f(t)\,g(u(t))$, d.h. u löst die DGL.

Außerdem $u(t_0) = H(F(t_0)) = H(0) = H(G(x_0)) = x_0$. $\square$ (3.)

$\square$ (14.1)

14.2 **Bemerkung**: Informeller ist die Lösung der DGL klar:

$$\frac{du}{dt} = f(t)\,g(u) \Rightarrow \frac{du}{g(u)} = f(t)\,dt \Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{g(u)}\,du}_{G(u)} = \underbrace{\int f(t)\,dt}_{F(t)} + C$$

Dann nach u auflösen.

14.3 **Beispiel**: a) $u' = e^u \sin t$. $\quad f(t) = \sin t$, $g(x) = e^x \neq 0 \; \forall x$.

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} \sin s\, ds = -\cos t + \cos t_0$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-y}\, dy = -e^{-x} + e^{-x_0}$$

Also zu lösen:

$$-e^{-u(t)} + e^{-x_0} = G(u(t)) = F(t) = -\cos t + \cos t_0$$

$$\Rightarrow u(t) = -\log(\cos t - \cos t_0 + e^{-x_0}) \quad \text{Lösung}$$

b) $u' = -\frac{t}{u}$, $u(1) = 1$.

$f(t) = t$, $g(y) = -\frac{1}{y}$, $F(t) = \int_1^t s\,ds = t^2 - 1$, $G(x) = \int_1^x \frac{1}{-\frac{1}{y}}\,dy = 1 - x^2$

Löse $1 - u^2(t) = G(u(t)) = F(t) = t^2 - 1$ nach $u(t)$ auf:

$u^2(t) = 2 - t^2 \Rightarrow u(t) = \sqrt{2 - t^2}$ (wegen $u(1) = 1$ ist $u(t) \geq 0$)

Lösung auf $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$