§15 Beispiele von DGL 2. Ordnung

15.1 Vorbemerkung: Wir betrachten nun einige Beispiele von DGL 2. Ordnung: $u'' - f(t,u,u') = 0$.

Wir wissen nach 13.4: für $a_2(t)u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u + b(t) = 0$ ist der Lösungsraum 2-dimensional, sofern $a_2(t) \neq 0 \;\; \forall t \in I$

(denn dann zu lösen: $u'' + \frac{a_1(t)}{a_2(t)}u' + \frac{a_0(t)}{a_2(t)}u + \frac{b(t)}{a_2(t)} = 0$)

15.2 Satz: Sei $h: J \to \mathbb{R}$ stetig, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $a \in J$ und $H(y) := -\int_a^y h(z)\,dz$, also $H: J \to \mathbb{R}$.

Betrachte die DGL 2. Ordnung $u'' = h(u)$ mit AWP $u(t_0) = c$, $u'(t_0) = d > 0$.

a) Ist u eine Lösung der DGL, so ex. $E \in \mathbb{R}$ mit
$$\frac{1}{2}u'(t)^2 + H(u(t)) \equiv E \quad \forall t \in I.$$

b) Sei $J' \subseteq J$ ein Intervall mit $H(x) < E \;\; \forall x \in J'$ und sei $b \in J'$.
Sei $G: J' \to \mathbb{R}$, $G(x) := \int_b^x \frac{1}{\sqrt{2(E - H(y))}}\,dy$.

Ist u eine Lösung der DGL, so ist $G(u(t)) = t - t_0 \;\; \forall t \in I'$, wobei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $t_0 \in I'$ und $u'(t) > 0 \;\; \forall t \in I'$ ist.

Beweis: a) $u''(t) = h(u(t)) = -H'(u(t)) \quad \forall t \in I$

$$\Rightarrow \underbrace{u''(t)u'(t) + H'(u(t))u'(t)}_{= \left(\frac{1}{2}u'(t)^2 + H(u(t))\right)'} \equiv 0 \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $t \mapsto \frac{1}{2}u'(t)^2 + H(u(t))$ ist konstant.

Also ex. $E \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2}u'(t)^2 + H(u(t)) \equiv E \quad \forall t \in I$.

b) Da nach a) $u'(t)^2 = 2(E - H(u(t)))$ $\forall t \in I'$,
gilt $u'(t) = \sqrt{2(E-H(u(t)))} =: g(u(t))$ ($u'(t) > 0$).
Habe also eine DGL 1. Ordnung $u' = g(u)$ mit getrennten Variablen.
Auf J' ist $g(x) \neq 0$ $\forall x \in J'$.
Nach 14.1 ist also $G(x) = \int_b^x \frac{1}{g(y)} dy$ zu betrachten sowie
$F(t) = \int_{t_0}^t ds = t - t_0$.
Die Lösung u erfüllt also $G(u(t)) = F(t) = t - t_0$.

$\square$

15.3 __Bemerkung:__ In der Physik wird die DGL aus 15.2 als Massenteilchen mit einem Freiheitsgrad, das sich unter dem Einfluss einer nur vom Ort abhängigen Kraft h bewegt, verstanden, h' ist seine Geschwindigkeit, H ist die potentielle Energie, E ist die Gesamt-Energie. (Forster §14)

15.4 __Beispiel:__ Die DGL des harmonischen Oszillators ist
$u'' = -ku$ mit $k > 0$, $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = v_0 > 0$.
Mit $h(z) = -kz$ ist $H(y) = -\int_0^y h(z)dz = k\int_0^y z\,dz = \frac{k}{2}y^2$.
Aus den Anfangsbedingungen folgt für eine Lösung u nach 15.2a:

$$E = \tfrac{1}{2}u'(t_0)^2 + H(u(t_0)) = \tfrac{1}{2}v_0^2 + H(0) = \tfrac{1}{2}v_0^2$$

Mit $J' = \left(-\frac{v_0}{\sqrt{k}}, \frac{v_0}{\sqrt{k}}\right)$ und

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2(E-H(y))}}\,dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - ky^2}}\,dy \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^{\frac{\sqrt{k}x}{v_0}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

(Subst. $s(y) = \frac{y\sqrt{k}}{v_0}$)

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{k}}{v_0}\right)$$

ist also $u(t) = G^{-1}(t-t_0) = \frac{v_0}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}(t-t_0)\right)$.

15.5 Proposition: Die Legendresche DGL für $n\in\mathbb{N}_0$

$$(1-t^2)u'' - 2tu' + n(n+1)u = 0$$

hat auf $(-1,1)$ einen zweidimensionalen Lösungsraum.

· Eine Lösung ist das Legendre-Polynom n-ter Ordnung

$$u(t) = P_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left((t^2-1)^n\right)^{(n)}$$

(n-te Ableitung von $(t^2-1)^n$)

Beweis: Zweidimensionaler Lösungsraum: 15.1.

Betrachte $h(t) := 2nt(t^2-1)^n = (t^2-1)g'(t)$ mit $g(t) = (t^2-1)^n$.

Zeige, dass $u_0(t) := g^{(n)}(t)$ die DGL löst.

Dann also auch $u(t) = P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\, g^{(n)}(t) = \frac{1}{2^n n!}\, u_0(t)$ eine Lösung.

1.) Es gilt $h^{(n+1)}(t) = (t^2-1)u_0''(t) + 2(n+1)t\,u_0'(t) + n(n+1)u_0(t)$.

Beweis von 1.): Erinnerung: $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$ (Leibnizregel)

Also
$$h^{(n+1)}(t) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(t^2-1)^{(k)} g^{(n+2-k)}(t)$$
$$= \binom{n+1}{0}(t^2-1)g^{(n+2)}(t) + \binom{n+1}{1}2t\,g^{(n+1)}(t) + \binom{n+1}{2}2\,g^{(n)}(t)$$
$$= (t^2-1)u_0''(t) + 2t(n+1)u_0'(t) + 2\binom{n+1}{2}u_0(t)$$

□ (1.)

2.) Es gilt $h^{(n+1)}(t) = 2nt\,u_0'(t) + 2n(n+1)u_0(t)$.

Beweis von 2.):
$$h^{(n+1)}(t) = (2nt\,g(t))^{(n+1)}$$
$$= 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(t)^{(k)} g^{(n+1-k)}(t)$$
$$= 2n\binom{n+1}{0} t\, g^{(n+1)}(t) + 2n\binom{n+1}{1} g^{(n)}(t)$$
$$= 2nt\,u_0'(t) + 2n(n+1)u_0(t).$$

□ (2.)

3.) Also $(t^2-1)u_0''(t) + 2(n+1)t\,u_0'(t) + n(n+1)u_0(t) = 2nt\,u_0'(t) + 2n(n+1)u_0(t)$

$\Rightarrow (t^2-1)u_0''(t) + 2t\,u_0'(t) - n(n+1)u_0(t) = 0$

$\Rightarrow (1-t^2)u_0''(t) - 2t\,u_0'(t) + n(n+1)u_0(t) = 0.$

□

15.6 Lemma: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a: I \to \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Dann hat die lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten
$$u' = a(t)u \qquad \text{mit AWP} \quad u(t_0) = x_0$$
genau eine Lösung, nämlich $u(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

Beweis: Mit $u(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ ist $u'(t) = \left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)' u(t)$
$$= a(t)u(t), \quad u(t_0) = x_0.$$
Eindeutigkeit: Setze $v(t) := e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$. Also $v'(t) = -a(t)v(t)$
und $v(t_0) = 1$.

Sei $w: I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der DGL $u' = a(t)u$ mit AWP.
Betrachte $\tilde{w}(t) := w(t)v(t)$.
Dann $\tilde{w}'(t) = w'(t)v(t) + w(t)v'(t)$
$$= a(t)w(t)v(t) - w(t)a(t)v(t) = 0 \quad \forall t \in I$$
$\Rightarrow$ $\tilde{w}$ ist konstant mit Wert $\tilde{w}(t_0) = w(t_0)v(t_0) = x_0 \cdot 1 = x_0$.
$\Rightarrow$ $w(t) = x_0 v(t)^{-1} = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = u(t)$.

$\square$

15.7 Lemma: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a,b: I \to \mathbb{C}$ stetig.
Sei $u_1: I \to \mathbb{C}$ eine Lösung der DGL 2. Ordnung

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0.$$

Sei $J \subseteq I$ ein Intervall mit $u_1(t) \neq 0 \ \forall t \in J$.

Sei $v(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{u_1(s)^2} e^{-\int_{t_0}^{s} a(x)dx} ds$ und $u_2(t) = u_1(t)v(t)$, v sei nicht konstant.

Dann sind u_1, u_2 ein Fundamentalsystem der DGL auf J.

Durch Kenntnis einer Lösung u_1 kann also eine zweite Lösung u_2 mittels Reduktion der Ordnung gewonnen werden (v wird durch Lösung einer DGL 1. Ordnung erhalten)

Beweis: 1.) v' löst die DGL $w' = c(t)w$
mit AWP $w(t_0') = x_0 := \frac{1}{u_1^2(t_0')}$ wobei $c(t) = -\left[2\frac{u_1'(t)}{u_1(t)} + a(t)\right]$.

Beweis von 1.): $v'(t) = \frac{1}{u_1(t)^2} e^{-\int_{t_0}^{t} a(x)dx}$.

Nach 15.6 ist die Lösung von $w' = c(t)w$ (mit AWP) gegeben durch
$$w(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} c(s)ds}.$$

Berechne
$$\int_{t_0'}^{t} c(s)ds = -2\int_{t_0}^{t} \frac{u_1'(s)}{u_1(s)}ds - \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$
$$= -2\left(\log u_1(t) - \log u_1(t_0)\right) - \int_{t_0'}^{t} a(s)ds$$

$$\Rightarrow e^{\int_{t_0}^{t} c(s)ds} = \frac{1}{u_1^2(t)} \cdot u_1^2(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

$$\Rightarrow w(t) = x_0 u_1^2(t_0') \cdot \frac{1}{u_1^2(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = v'(t). \qquad \square(1.)$$

2.) u_2 löst die DGL $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$.

Beweis von 2.): Nach 1.) ist $v''(t) + 2\frac{u_1'(t)}{u_1(t)}v'(t) + a(t)v'(t) = 0$.

$$\Rightarrow u_1(t)v''(t) + 2u_1'(t)v'(t) + a(t)u_1(t)v'(t) = 0.$$

Also $u_2''(t)+a(t)u_2'(t)+b(t)u_2(t)$

$$\overset{(u_2=u_1v)}{=} u_1''(t)v(t)+2u_1'(t)v'(t)+u_1(t)v''(t)+a(t)u_1'(t)v(t)+a(t)u_1(t)v'(t)+b(t)u_1(t)v(t)$$

$$=\underbrace{\left(u_1''(t)+a(t)u_1'(t)+b(t)u_1(t)\right)}_{=0 \text{ da } u_1 \text{ Lösung}}v(t)+\underbrace{\left(u_1(t)v''(t)+2u_1'(t)v'(t)+a(t)u_1(t)v'(t)\right)}_{=0}$$

$=0$ $\square(2.)$

3.) u_1, u_2 sind linear unabhängig.

Beweis zu 3.): Da v nicht konstant ist, sind u_1 und u_1v linear unabhängig. $\square(3.)$

$\square(15.7)$

15.8 Proposition: Für $n=1$ besitzt die Legendresche DGL die allgemeine Lösung: $u(t)=aP_1(t)+b\left(\frac{t}{2}\log\frac{1+t}{1-t}-1\right)$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Beweis: Nach 15.5 ist $P_1(t)=\frac{1}{2}(t^2-1)'=t$ eine Lösung der DGL.
Nach der Reduktion der Ordnung 15.7 ist dann

$$u_2(t)=P_1(t)v(t)=t\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^2}e^{-\int_{t_0}^{s}\frac{2x}{1-x^2}dx}ds$$ eine l.u. Lösung.

Berechne $\int_{t_0}^{s}\frac{2x}{1-x^2}dx=\log(1-s^2)-\log(1-t_0^2)$

$$\Rightarrow e^{-\int_{t_0}^{s}\frac{2x}{1-x^2}dx}=(1-t_0^2)\cdot\frac{1}{1-s^2}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^2}e^{-\int_{t_0}^{s}\frac{2x}{1-x^2}dx}ds=(1-t_0^2)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{1-s^2}ds$$

$$=(1-t_0^2)\left[\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^2}ds+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{1-s}ds+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{1+s}ds\right]$$

$$\left[\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\right)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{(1+s)+(1-s)}{(1-s)(1+s)}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{1-s^2}=\frac{(1-s^2)+s^2}{s^2(1-s^2)}=\frac{1}{s^2(1-s^2)}\right]$$

$$=(1-t_0^2)\left\{-\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\log\frac{1+s}{1-s}\right\}\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = t \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s^2} e^{-\int_{t_0}^{s} \frac{2x}{1-x^2}dx}$$

$$= t \cdot (1-t_0^2)\left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} - C\right], \text{ ein } C \in \mathbb{R}$$

$$= C' \cdot \left[-1 + \frac{t}{2}\log\frac{1+t}{1-t} - Ct\right], \text{ ein } C' \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung ist

$$u(t) = at + b\left[\frac{t}{2}\log\frac{1+t}{1-t} - 1 - Ct\right]$$

$$= \underbrace{(a-C)}_{=:a'}t + b\left(\frac{t}{2}\log\frac{1+t}{1-t} - 1\right) \text{ auf } t \in (-1,1)$$

$\square$

15.9 Bemerkung:

a) Die Hermitesche DGL für $n \in \mathbb{N}_0$

$$u'' - 2tu' + 2nu = 0$$

wird durch das Hermite-Polynom n-ter Ordnung

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}(e^{-t^2})^{(n)}$$

gelöst.

b) Die Laguerresche DGL für $n \in \mathbb{N}_0$

$$tu'' + (1-t)u' + nu = 0$$

wird durch das Laguerresche Polynom n-ter Ordnung

$$L_n(t) = e^t(e^{-t})^{(n)}$$

gelöst.

c) Die <u>Besselsche DGL</u>

$$u'' + \frac{1}{t}u' + \left(1-\frac{p}{t^2}\right)u = 0 \quad , \quad p \in \mathbb{R}, \; t > 0$$

lässt sich nicht mit elementaren Funktionen lösen.
Der zweidimensionale Lösungsraum wird durch die <u>Besselfunktion</u> p-ter Ordnung und die <u>Neumann-Funktion</u> p-ter Ordnung gegeben.
Die Besselsche DGL beschreibt z.B. die Schwingungen eines Trommelfells/Membran.