§16 Satz von Peano

16.1 <u>Erinnerung</u>: Picard-Lindelöf (11.4) sagt im Wesentlichen (für $N=1$): Ist $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig und uniform Lipschitzstetig in der zweiten Komponente, so hat die DGL 1. Ordnung $u'=f(t,u)$ mit AWP eine Lösung (sogar eine eindeutige). Was ist nun, wenn f bloß stetig, nicht aber Lipschitzstetig ist?
Der Satz von Arzela-Ascoli liefert einen Existenzsatz in diesem Fall (allerdings keine Eindeutigkeit).
Arzela-Ascoli (4.4): Eine Menge $A\subseteq\mathcal{C}[0,1]$ ist kompakt, genau dann, wenn sie beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ($\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall f\in A\ \forall x,y\in[0,1]$ mit $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$) ist.

16.2 <u>Korollar</u>: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n:[a,b]\to\mathbb{C}$. Sei $C>0$ mit $\|f_n\|_\infty\le C$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Zu $\varepsilon>0$ gebe es ein $\delta>0$, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle $x,y\in[a,b]$ mit $|x-y|<\delta$: $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

<u>Beweis</u>: $A_0:=\{f_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, $A:=\overline{A_0}\subseteq\mathcal{C}[a,b]$. Die Menge A ist abgeschlossen (per Definition) und beschränkt, da A_0 nach Voraussetzung beschränkt ist. Außerdem ist A_0 gleichgradig stetig, nach 4.3(d) also auch A. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli (4.4) – gilt allgemein für $\mathcal{C}[a,b]$ – ist A also kompakt, und somit auch folgenkompakt (3.7). Somit besitzt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A eine konvergente Teilfolge (3.5). □

16.3 Satz (Peano): Sei $f:[a,b]\times[y_0-r, y_0+r]\to\mathbb{R}$ stetig, $h:=\min\{b-a, \frac{r}{\|f\|_\infty}\}$. Dann besitzt die DGL 1. Ordnung
$u'=f(t,u)$ mit AWP $u(a)=y_0$ eine Lösung für $t\in[a,a+h]$.

Beweis: Betrachte $T: C[a,a+h]\to C[a,a+h]$ mit $(Tg)(t):=y_0+\int_a^t f(s,g(s))\,ds$

Also $u'=f(t,u) \iff Tu=u$.

Setze
$$u_n(t):=\begin{cases} y_0 & \text{für } t\in[a,a+\frac{1}{n}] \\ y_0+\int_a^{t-\frac{1}{n}} f(s,u_n(s))\,ds & \text{für } t\in[a+\frac{1}{n},a+h]\end{cases}$$

1.) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\|u_n\|_\infty\le r+|y_0|$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Beweis zu 1.): $|u_n(t)-y_0| \underset{\text{für } t\ge a+\frac{1}{n}}{\le} \int_a^{t-\frac{1}{n}} \underbrace{|f(s,u_n(s))|}_{\le\|f\|_\infty}\,ds \le \underbrace{|(t-\tfrac{1}{n})-a|}_{\le h\le\frac{r}{\|f\|_\infty}}\cdot\|f\|_\infty\le r$

$\forall t\in[a,a+h]$

$\Longrightarrow \|u_n\|_\infty\le|y_0|+r \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\square$(1.)

2.) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x,y\in[a,a+h]$ mit $|x-y|<\delta$: $|u_n(x)-u_n(y)|<\varepsilon$.

Beweis zu 2.): Sei $\varepsilon>0$. Setze $\delta:=\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$. Sei $n\in\mathbb{N}$, $|x-y|<\delta$, $x<y$.

a) $x,y\ge a+\frac{1}{n}$. $|u_n(x)-u_n(y)|\le\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{y-\frac{1}{n}} f(s,u_n(s))\,ds\right|\le\|f\|_\infty\cdot|y-x|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

b) $x,y\le a+\frac{1}{n}$. $|u_n(x)-u_n(y)|=0$.

c) $x\le a+\frac{1}{n}\le y$. $|u_n(x)-u_n(y)|=\left|\int_a^{y-\frac{1}{n}} f(s,u_n(s))\,ds\right|\le\|f\|_\infty\cdot|(y-\frac{1}{n})-a|$

$=\|f\|_\infty\cdot|y-(a+\frac{1}{n})|$

$\le\|f\|_\infty\cdot|y-x|<\varepsilon$. $\square$(2.)

3.) Nach 16.2 besitzt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $u\in C[a,a+h]$. Dann gilt $u(t)=y_0+\int_a^t f(s,u(s))\,ds=(Tu)(t)$.

Beweis zu 3.): Sei $\varepsilon>0$ und $t\in[a,a+h]$. Sei $\delta>0$, so dass $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(s,x)-f(s,y)|<\frac{\varepsilon}{3h}$.
Sei $n\in\mathbb{N}$, so dass $\|u-u_n\|_\infty<\min(\frac{\varepsilon}{3},\delta)$ und $\frac{1}{n}\|f\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3}$.

Für $t \geq a + \frac{1}{n}$ ist dann:

$$|u(t) - (y_0 + \int_a^t f(s,u(s))\,ds)|$$
$$\leq |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t) - (y_0 + \int_a^t f(s,u(s))\,ds)|$$
$$\leq \|u - u_n\|_\infty + \left|\int_a^{t-\frac{1}{n}} (f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)))\,ds\right| + \left|\int_{t-\frac{1}{n}}^t f(s,u(s))\,ds\right|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{|(t-\tfrac{1}{n}) - a|}_{\leq h} \cdot \frac{\varepsilon}{3h} + \frac{1}{n}\|f\|_\infty < \varepsilon$$

Für $t \in [a, a+\frac{1}{n}]$ ist:

$$|u(t) - (y_0 + \int_a^t f(s,u(s))\,ds)|$$
$$\leq \|u - u_n\|_\infty + \left|\int_a^t f(s,u(s))\,ds\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{|t-a|}_{\leq \frac{1}{n}}\|f\|_\infty < \varepsilon.$$

Also $\|u - Tu\|_\infty < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, d.h. $u = Tu$. □ (3.)

□ (16.3)

16.4 <u>Bemerkung</u>: Die Lösung aus 16.3 ist nicht notwendig eindeutig.

Betrachte $u'(t) = u(t)^{\frac{2}{3}}$ mit $u(0) = 0$, $t \geq 0$.

Also $u' = f(t,u)$ mit $f(t,y) = y^{\frac{2}{3}}$.

Dann ist $f: [0,\infty) \times [0,b] \to \mathbb{R}$ stetig, aber nicht uniform Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente; die DGL hat nämlich unendlich viele Lösungen $u_a(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{1}{27}(t-a)^3 & t \geq a \end{cases}$, $a \in [0,b]$

Denn: $u_a'(t) = \frac{1}{9}(t-a)^2 = \left(\frac{1}{27}(t-a)^3\right)^{\frac{2}{3}} = u_a(t)^{\frac{2}{3}}$, $u_a(0) = 0$

(Es ist sogar $u_b \equiv 0$ eine Lösung.)