§ 17 Doppelintegrale und abstrakte Integration

17.1 <u>Erinnerung</u> (Satz 9.1): Sei $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig und $F:[c,d]\to\mathbb{R}$ mit $F(y):=\int_a^b f(x,y)\,dx$. Dann ist F stetig. Ist f sogar stetig partiell differenzierbar nach t, so ist F differenzierbar mit $F'(t)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

17.2 <u>Satz (Doppelintegrale)</u>: Sei $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Die Integrale existieren also und die Reihenfolge der Integration kann vertauscht werden ($\rightsquigarrow$ allgemeiner: Satz von Fubini).

<u>Beweis</u>: $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dy$ ist stetig, kann also integriert werden.
D.h. der Ausdruck $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d F(y)\,dy$ macht Sinn.

Definiere $\varphi:[c,d]\to\mathbb{R}$ durch $\varphi(y):=\int_a^b G(x,y)\,dx$ mit G:
$G:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, $G(x,y):=\int_c^y f(x,t)\,dt$. Habe $G(x,c)=0$.

Die Funktion φ ist wohldefiniert, denn mit $h:[a,b]\times[c,y]\to\mathbb{R}$, $h(x,t):=f(x,t)$ ist $H(x)=\int_c^y h(x,t)\,dt$ stetig nach 9.1, also ex. $\int_a^b H(x)\,dx=\int_a^b G(x,y)\,dx$ für jedes y.

Außerdem ist G stetig partiell diffbar nach y, d.h. φ ist diffbar mit $\varphi'(y)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\,dx=\int_a^b f(x,y)\,dx$ nach 9.1.

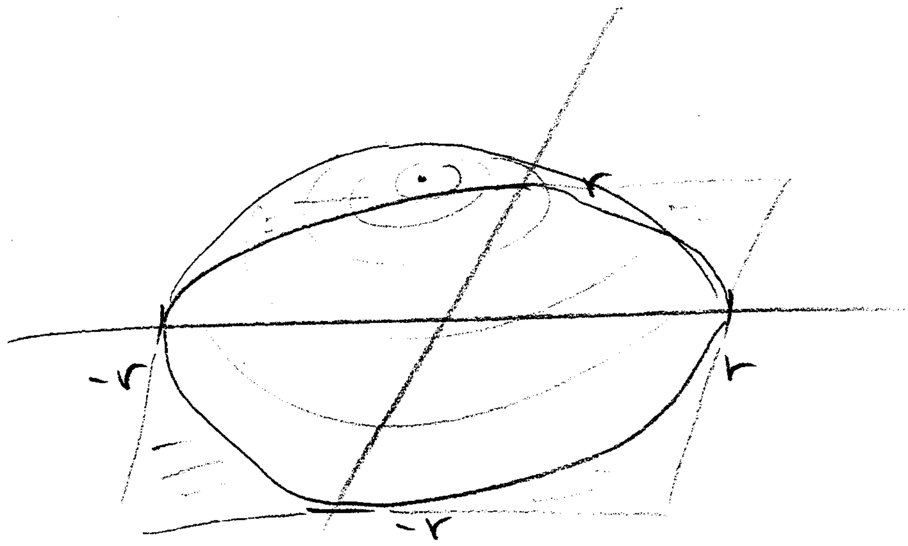
Daher $$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d \varphi'(y)\,dy=\varphi(d)-\underbrace{\varphi(c)}_{=0 \text{ da } G(x,c)=0}=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,dt\right)dx$$

$\square$

17.3 Beispiel: Während $\int_a^b f(x)\,dx$ der Fläche unter dem Graphen von f entspricht, BL $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ das Volumen unter dem Graphen von f.

Betrachte $f: [-r,r]\times[-r,r] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)} & x^2+y^2 \le r^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Der Graph der Funktion beschreibt also eine Halbkugel.



Berechne $V := \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} f(x,y)\,dx\,dy$. Setze $\varrho(y) := \sqrt{r^2-y^2}$

$$g(y) := \int_{-r}^{r} f(x,y)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-\varrho(y)}^{\varrho(y)} \sqrt{\varrho^2(y)-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2(y)\cos^2 t\,dt =$$

$\left(f(x,y)=0 \text{ falls } |x| \le \varrho(y)\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x(t) = \varrho(y)\sin t \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{\varrho^2(y)-x^2(t)}\,x'(t)}_{=\varrho(y)\sqrt{1-\sin^2 t}\,\varrho(y)\cos t}\,dt = \int_{x(-\frac{\pi}{2})}^{x(\frac{\pi}{2})} \sqrt{\varrho^2(y)-z^2}\,dz \end{array}\right]$$

$$= \varrho^2(y)\left[\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \varrho^2(y)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow V = \int_{-r}^{r} g(y)\,dy = \frac{\pi}{2}\int_{-r}^{r}\varrho^2(y)\,dy = \frac{\pi}{2}\int_{-r}^{r}(r^2-y^2)\,dy = \frac{\pi}{2}\left[r^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-r}^{r}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(-r^3+\frac{1}{3}r^3\right)\right) = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad \text{Volumen der Halbkugel}$$

17.4 Satz: a) Auf $\mathcal{C}[0,1]$ definieren wir die folgenden Normen:

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx \qquad (p=1)$$

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1<p<\infty \qquad \text{„}L^p\text{-Normen"}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad (p=\infty)$$

Der metrische Raum $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_p)$ ist nicht vollständig*, aber es gibt eine Vervollständigung $(L^p[0,1], d)$, d.h. eine Abbildung $T: \mathcal{C}[0,1] \to L^p[0,1]$, so dass $d(Tf, Tg) = \|f-g\|_p$ für eine Metrik d auf $L^p[0,1]$ (bzgl. der $L^p[0,1]$ vollständig ist) und das Bild von $\mathcal{C}[0,1]$ unter T ist dicht in $L^p[0,1]$.

b) Das Integral $\int : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$, $\int f := \int f(x)\,dx$ setzt sich eindeutig fort nach $\int : L^1[0,1] \to \mathbb{R}$ und es gilt

(i) $\int (af+bg) = a\int f + b\int g \qquad \forall f,g \in L^1[0,1]\ \forall a,b\in\mathbb{R}$

(ii) $|\int f| \leq \int |f| = \|f\|_1 \qquad \forall f\in L^1[0,1]$

(iii) $f\geq 0$ (d.h. $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$, $f_n \geq 0\ \forall n$, $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$) $\Rightarrow \int f \geq 0$

(iv) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1[0,1]$, $f_n \leq f_{n+1}\ \forall n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n < \infty$

$\Rightarrow \exists f\in L^1[0,1]$ st. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ und $\int \underbrace{\lim f_n}_{=f} = \lim \int f_n$

(„monotone Konvergenz")

Das Integral heißt Daniell-Integral ($\sim$ allgemeiner: Lebesgue-Integral).

(* für $p=2$ siehe 1.21)

Beweisidee: 1.) Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist
$\mathcal{C}_b(X) := \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ mit $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$
ein vollständiger Raum.

„Beweis" von 1.): ähnlich wie für $\mathcal{C}[0,1]$. $\square$ (1.)

2.) Jeder metrische Raum (X,d) hat eine Vervollständigung $(Y,\tilde{d})$,
also eine Abbildung $T: X \to Y$ mit $\tilde{d}(Tx,Ty) = d(x,y)$ und
$T(X) \subseteq Y$ dicht, $(Y,\tilde{d})$ vollständig.

„Beweis" von 2.): Beachte, dass T injektiv ist: $Tx = Ty \Rightarrow 0 = \tilde{d}(Tx,Ty) = d(x,y) \Rightarrow x = y$

Beachte außerdem, dass die Vervollständigung (bis auf eine Abbildung, die die Metrik erhält, und bijektiv ist) eindeutig ist.
Konstruktion von Y: Bette X in $\mathcal{C}_b(X)$ per $T: X \to \mathcal{C}_b(X)$, $x \mapsto f_x$
$f_x(t) := d(x,t) - d(x_0,t)$ (für $x_0 \in X$ fest) ein.
Setze $Y := \overline{T(X)}$. $\square$ (2.)

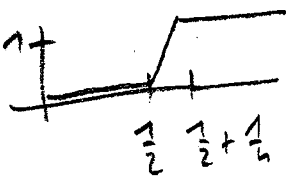
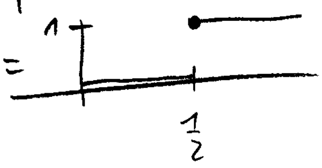
3.) Definiere $L^p[0,1]$ als die Vervollständigung von $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_p)$
und überprüfe, dass das wieder ein normierter Vektorraum ist.

4.) Die Eigenschaften (i)-(iii) des Integrals auf $L^1[0,1]$ ergeben sich im Wesentlichen aus der Tatsache $\underset{\in \mathcal{C}[0,1]}{f_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ und den Eigenschaften von $\int: \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$.
Sei $f \in L^1[0,1]$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, $f_n \in \mathcal{C}[0,1]$ (bzw. $f_n \in T(\mathcal{C}[0,1])$, $f \in \overline{T(\mathcal{C}[0,1])}$).
Da $\left|\int_0^1 f_n(t)\,dt - \int_0^1 f_m(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \le \|f_n - f_m\|_1$
und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist, ist $\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also ex. $\int f := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$. Zeige: unabhängig von der Wahl von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

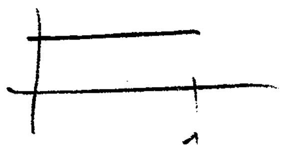
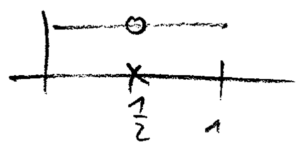
5.) Die Eigenschaft (iv) folgt, da $(\int f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach (iii) eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$, die beschränkt ist.
Zeige dann, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in L^1 ist.

„$\square$"

17.5 Bemerkung: Nach der Konstruktion ist $L^p[0,1]$ ein abstrakter Raum von „Grenzwerten von Cauchyfolgen in $C[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|_p$". Diese entsprechen aber tatsächlich Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

Z.B.: $f_n =$  $\xrightarrow{\|\cdot\|_p}$ $f =$ 

Da aber $\|\cdot\|_p$ nicht zwischen Funktionen unterscheiden kann, die auf kleinen Mengen abgeändert werden, müssen Funktionen identifiziert werden, die „fast überall" gleich sind.

Z.B. $f =$  und $g =$ 

haben $\|f-g\|_p = 0$. Müssen also f und g identifizieren.

17.6 Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, falls

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ Intervalle $I_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

und $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

17.7 Beispiele: a) $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge $\left(\{x\} \subseteq (x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \; \forall \varepsilon\right)$

b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge

$\Big(\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$ abzählbar, $I_n := \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$,

$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \Big)$

c) die Cantormenge ist eine Nullmenge

d) $I = [a,b]$ ist keine Nullmenge $\Big(I \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ offen $\Rightarrow I \subseteq I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_m}$

und $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \geq \sum_{k=1}^{m} (b_{n_k} - a_{n_k}) \geq b-a \Big)$

e) abzählbare Mengen sind Nullmengen.

17.8 <u>Definition</u>: $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $f = g$ <u>fast überall</u> (f.ü.) gilt, falls $\{x \in [0,1] \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

17.9 <u>Satz</u>: Zu $f \in L^p[0,1]$ ex. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in C[0,1]$, so dass $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ und $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall konvergiert.
Wir können also das abstrakte Element f mit einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die fast überall $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ erfüllt, identifizieren.

<u>Beweis</u>: lang ... □

17.10 <u>Korollar</u>: $f, g \in L^p[0,1]$ mit $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \int f = \int g$.

17.11 <u>Beispiel</u>: $\int \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = 0$.