FUNKTIONENTHEORIE II

Einführung in die
geometrische Funktionentheorie

Kap. 1 Schlichte Funktionen oder die Idee der geometrischen Funktionentheorie

Wir erinnern uns:

Funktionentheorie ist die Theorie der holomorphen Funktionen.

1.1. Erinnerung:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

für alle $z_0 \in \Omega$ existiert.

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn f reell total differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} u := \mathrm{Re}(f) \\ v := \mathrm{Im}(f) \end{array}$$

auf Ω erfüllt sind. ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$)

Für eine reell partiell differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind die <u>Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen</u> definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Dann sind die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen äquivalent zu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0 .$$

Im Gegensatz dazu:

Die geometrische Funktionentheorie ist die Theorie der holomorphen Abbildungen.

Wie ist das zu verstehen?

Funktionentheorie	geometrische Funktionentheorie
$f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph	$f: \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorph
$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, … $(\to \mathcal{O}(\Omega))$	$\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen, … $(\to \mathcal{O}(\Omega_1, \Omega_2))$
Fragestellungen	Fragestellungen
Kurvenintegrale, Stammfunktionen, Potenz- und Laurentreihen, Residuen, …	Surjektivität, Injektivität, Bijektivität, Holomorphie von f^{-1}, $f(\Omega_1) = ?$, Riemannscher Abbildungssatz, …

$\exists f: \Omega_1 \to \Omega_2$ biholomorph

$\left(\begin{array}{l}\text{d.h. } f: \Omega_1 \to \Omega_2 \text{ bijektiv,} \\ f, f^{-1} \text{ holomorph}\end{array}\right)$

$\Rightarrow \Omega_1, \Omega_2$ haben „ähnliche" funktionentheoretische Eigenschaften

Morphismen der Funktionentheorie

In dieser Vorlesung bezeichnen wir mit

$$\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe.

1.2. Definition:

- Eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt schlicht, falls f injektiv ist.

- $$\mathcal{S} := \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \text{ schlicht} \mid f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \}$$

Die Klasse $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ist das zentrale Objekt dieser Vorlesung.

Um ~~die~~ Bedeutung von $\mathcal{S}$ besser zu verstehen, wiederholen wir hier einige Resultate aus der Funktionentheorie I (vgl. im Skript: Kapitel 14, 15, 16)

1.3. Satz (von der offenen Abbildung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf keiner Zusammenhangskomponenten von Ω konstant. Dann ist $f(\Omega)$ offen in $\mathbb{C}$.

1.4. Satz (von der Gebietstreue):

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant. Dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

1.5. Satz:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Weiter sei $z_0 \in \Omega$ gegeben. Genau dann ist f in einer Umgebung von z_0 injektiv, wenn $f'(z_0) \neq 0$.

1.6. Satz (von der Holomorphie der Umkehrfunktion)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ injektiv. Dann ist $f(\Omega)$ offen und die Abbildung $f : \Omega \to f(\Omega)$ ist biholomorph und für $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in f(\Omega).$$

1.7. Satz

Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und ist $f \in \mathcal{O}(G)$ injektiv, so ist auch $f(G)$ einfach zusammenhängend.

1.8. Satz (Riemannscher Abbildungsatz)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $G \neq \mathbb{C}$. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$f : G \longrightarrow \mathbb{D}$$

Fordern wir für ein $z_0 \in G$ zudem

$$f(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(z_0) > 0 , \qquad (*)$$

so ist f hierdurch eindeutig bestimmt.

Wir sagen auch:
„G ist biholomorph / konform äquivalent zu $\mathbb{D}$."

1.9. Bemerkung

Dass zu jedem $z_0 \in G$ genau eine biholomorphe Abbildung mit $(*)$ existiert, folgt aus dem Lemma von Schwarz und unter Verwendung der Automorphismen

$$z \longmapsto \lambda \cdot \frac{a - z}{1 - \bar{a} z} \quad , \quad |\lambda| = 1 , \; a \in \mathbb{D}$$

von $\mathbb{D}$.

Wir sehen damit:

① Jedes $f \in \mathcal{S}$ gibt eine biholomorphe Abbildung $f: \mathbb{D} \to G$ auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G = f(\mathbb{D})$ mit

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0) = 1.$$

② Ist umgekehrt $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$f: \mathbb{D} \to G$$

und

$$\tilde{f}: \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)}$$

gehört zu $\mathcal{S}$.

Damit wird die Untersuchung von $\mathcal{S}$ zu einer zentralen Aufgabenstellung der geometrischen Funktionentheorie. Ferner stellt sich die Frage, wie die „klassischen" funktionentheoretischen Eigenschaften einer holomorphen Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ durch die Schlichtheitsbedingung beeinflusst werden.

1.10. Bemerkung

Jede Funktion $f \in \mathcal{S}$ besitzt auf $\mathbb{D}$ eine Potenzreihendarstellung der Form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Die <u>Bieberbachsche Vermutung</u> besagt nun, dass

$$|a_n| \leq n \quad \forall\, n \geq 2$$

erfüllt ist. (Ludwig Bieberbach, 1916)

Der Beweis dieser tiefliegenden Vermutung, der erstmals von Louis de Branges im Jahr 1985 erbracht wurde, ist das Ziel dieser Vorlesung.