Kap. 3 Spezialfälle und Varianten der Bieberbachschen Vermutung

Für gewisse Unterklassen von $\mathcal{S}$ lässt sich die Bieberbachsche Vermutung vergleichsweise einfach beweisen.

3.1. Definition

Wir bezeichnen mit $C \subset \mathcal{S}$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{S}$, für die $f(\mathbb{D})$ konvex ist.

3.2. Satz

Eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ gehört genau dann zur Klasse C, wenn gilt

$$(3.1.) \quad \operatorname{Re}\left(1 + z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Beweis:

(1) Behauptung: Ist $f(\mathbb{D})$ für ein $f \in \mathcal{S}$ konvex, so ist auch $f(D_r(0))$ konvex für alle $0 < r < 1$.

(Die Umkehrung dieser Aussage ist offenbar ebenfalls richtig.)

Beweis:

Seien $z_1, z_2 \in D_r(0)$ mit $|z_1| \leq |z_2|$ gegeben.

Wir setzen $w_1 := f(z_1)$, $w_2 := f(z_2)$ und

$$w_0 := t w_1 + (1-t) w_2 \quad \text{für ein } t \in (0,1).$$

Da $f(\mathbb{D})$ konvex ist, gibt es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = w_0$.

g.z.z: $|z_0| < r$

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$g: \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto t\, f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t) f(z)$$

(der Fall $z_2 = 0$ ist trivial, wir können also $z_2 \neq 0$ annehmen), die

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad g(z_2) = w_0$$

erfüllt. Weil $f(\mathbb{D})$ konvex ist, ist

$$h := f^{-1} \circ g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

wohldefiniert und erfüllt $h(0) = 0$.

Nach dem Lemma von Schwarz gilt also

$$|h(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

und damit insbesondere

$|z_0| = |h(z_2)| \leq |z_2| < r$, da $h(z_2) = f^{-1}(w_0) = z_0$.